DOCUMENT RESUME

ED 231 623 SE 041 911

AUTHOR Andelfinger, Bernhard; Zuckett-Peerenboom, Rolf D.
TITLE Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Proportion. Curriculum Heft 22. [and] Quellensammlung zu: Didaktischer Informationdienst Mathematik. Thema: Proportion. Dokumentation: Literaturnachweise 3. (Didactical Information Service for Mathematics. Topic: Proportion. Curriculum Text 22. [and] Source Materials for the: Didactical Information Service for Mathematics. Topic: Proportion. Documentation: Literature Review 3).
INSTITUTION Landesinstituts fur Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung, Neuss (West Germany).
PUB DATE 82
NOTE 523p.; A five-page precis, in English, of the DID-M and its pilot study on proportion is included.
PUB TYPE Information Analyses (070) -- Reference Materials - Bibliographies (131) -- Guides - Classroom Use - Guides (For Teachers) (052)
LANGUAGE German

EDRS PRICE MF02/PC21 Plus Postage.
DESCRIPTORS *Annotated Bibliographies; *Elementary School Mathematics; Elementary Secondary Education; *Mathematics Instruction; *Ratios (Mathematics); *Reference Materials; Secondary School Mathematics; *Teaching Methods; Textbooks
IDENTIFIERS *West Germany

ABSTRACT

In 1979, a small team at the Landesinstitut Nordrhein-Westfalen Neuss, Federal Republic of Germany, started the Didactical Information Service for Mathematics in School (DID-M). They are developing a series of books containing information on and documentation for the most important mathematics topics for grades 5-10. Chosen as the first of these topics is ratio and proportion. The curriculum book provides information for teachers to bridge the communication gap between teachers and students, informs teachers about attitudes and concept attainment, and gives hints for teachers on how to bridge the gaps and for administrators on how to renew the curriculum for better bridging the gaps. Teaching concepts are described, the actual teaching situation is discussed, research results from systematic searches are analyzed, and teaching and learning concepts are compared. The supporting documentation book provides background materials and references with abstracts. (MNS)

****
* Reproductions supplied by EDRS are the best that can be made *
* from the original document. *
****

Curriculum Heft 22

Didaktischer Informationsdienst Mathematik
Thema: Proportion

ED231623

U.S. DEPARTMENT OF EDUCATION
NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION
EDUCATIONAL RESOURCES INFORMATION CENTER (ERIC)

✓ This document has been reproduced as received from the person or organization originating it.
Minor changes have been made to improve reproduction quality.

• Points of view or opinions stated in this document do not necessarily represent official NIE position or policy.

"PERMISSION TO REPRODUCE THIS MATERIAL HAS BEEN GRANTED BY
Bernhard Andelfinger
TO THE EDUCATIONAL RESOURCES INFORMATION CENTER (ERIC)."

SE041911

Curriculum Heft 22

Didaktischer Informationsdienst Mathematik
Thema: Proportion

Bernhard Andelfinger

Landesinstitut
für Curriculumentwicklung,
Lehrerfortbildung
und Weiterbildung

UUC 3

/Didaktischer Informationsdienst Mathematik/. Thema: Proportion.

Andelfinger, Bernhard

Landesinstitut für Curriculumentwicklung, Lehrerfortbildung und Weiterbildung (Neuss) (Hrsg.):

Neuss: LI/1981/. 136 S.

/Curriculum. 22/

Curriculum; Curriculumentwicklung; Mathematikunterricht: Sekundarstufe I; Didaktik; Fachdidaktik; Lehrplan; Funktion; ↔ Proportionalität;

1. Auflage 1981

Nachdruck nur mit Genehmigung des

Landesinstituts für Curriculumentwicklung,
Lehrerfortbildung und Weiterbildung
Görlitzer Str. 3, 4040 Neuss

INHALT

		Seite
V O R W O R T		5
VORBEMERKUNG		7
0	DER DIDAKTISCHE INFORMATIONSDIENST MATHEMATIK (DID-M)	9
0.1	Ziele von DID-M	9
0.2	Methoden von DID-M	10
1	EINFÜHRUNG	11
1.1	Zur Situation des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I	11
1.2	Was das hier vorliegende Heft will	12
1.3	Zur Wahl des Themas	13
ANALYSEN I (Fachwissenschaft und Fachdidaktik)		15
2	DER BEREICH "PROPORTION" IN FACHWISSENSCHAFTLICHER SICHT	15
2.1	Algebraische Aspekte	15
2.2	Funktionale Aspekte	16
2.3	Strukturelle Aspekte	19
2.4	Geometrische Aspekte	20
2.5	Fazit und Überblick	21
3	DER BEREICH "PROPORTION" IN DEN LEHRPLÄNEN	23
3.1	Grundaufbau mathematischer Lehrpläne der Sekundarstufe I	23
3.2	Wo und wie treten proportionale Aspekte auf?	24
3.3	Fazit	25
3.4	Kritische Gedanken	26
4	DER BEREICH "PROPORTION" IN DER FACHDIDAKTISCHEN DISKUSSION	29
4.1	Die Zieldiskussion	29
4.2	Die Methodendiskussion	29
4.3	Fazit	34

		Seite
ANALYSEN II	(Schülerverhalten)	35
5	GEWINNUNG UND DARSTELLUNG DER ERFAHRUNGSWERTE	35
5.1	Lehrerbefragung	35
5.2	Berücksichtigung der empirischen Unterrichtsforschung	36
5.3	Fazit	37
5.4	Literaturhinweis	37
6	LERNVERHALTEN VON SCHÜLERN IM BEREICH "PROPORTION" (Übersicht)	39
6.1	Netzwerk von Aspekten	39
6.2	Verwerfung des Netzwerks	43
6.3	Fazit	44
7	LERNVERHALTEN VON SCHÜLERN IM BEREICH "PROPORTION" (Einzeldarstellungen)	47
7.1	Der Aspekt "Verhältnisse"	47
7.2	Der Aspekt "Schlußrechnen"	54
7.3	Der Aspekt "Funktionen"	59
7.4	Der Aspekt "Ähnlichkeit"	65
7.5	Der Aspekt "Brüche"	69
7.6	Der Aspekt "Textaufgaben/Sachrechnen"	74
8	DIE LAGE IM BEOBACHTUNGSFELD - EINE VERGLEICHENDE INTERPRETATION	81
VORSCHLÄGE ZUM UNTERRICHT		83
9	DER BEREICH "PROPORTION" IM UNTERRICHT	83
9.1	Der Aspekt "Verhältnisse" im Unterricht	83
9.2	Der Aspekt "Schlußrechnen" im Unterricht	93
9.3	Der Aspekt "Funktionen" im Unterricht	101
9.4	Der Aspekt "Ähnlichkeit" im Unterricht	109
9.5	Der Aspekt "Brüche" im Unterricht	114
9.6	Der Aspekt "Textaufgaben/Sachrechnen" im Unterricht	121
9.7	Übersichtstafel: Lehrziele im Bereich "Proportion"	130
LITERATURVERZEICHNIS		133

V O R W O R T

"Mathematisches Denken" und "praktischer Alltagsverstand": obwohl beide von großer praktischer Bedeutung sind, gelten sie seit je her nicht als dasselbe. Dies ist allerdings bei den didaktischen Bemühungen um den Mathematikunterricht selten angemessen berücksichtigt worden. Da Schüler zunächst in Bahnen des praktischen Alltags denken, bleibt es fraglich, ob ihre mathematischen Fähigkeiten allein durch didaktisch "kleingearbeitete" mathematische Theorien gefördert werden können. Der Mathematikunterricht wird sich daher nicht nur von diesen Theorien, sondern auch von dem alltagspraktischen Problemlösungsverhalten leiten lassen müssen, das in den verschlungenen Pfaden der Lebenspraxis oft aus guten Gründen keine systematischen Methoden verwendet. Mathematikunterricht ist somit auch als ein Prozeß der Kommunikation zwischen verschiedenen Denkstilen zu verstehen, mit denen sich der Fachlehrer vertraut machen muß, um pädagogisch erfolgreich zu sein.

Der "Didaktische Informationsdienst Mathematik" will diesen kommunikativen Problemen des Mathematikunterrichts nachgehen. Er dient allerdings nicht nur zur Information über Lehr- und Lernprozesse. Er soll auch einen Informations- und Erfahrungsaustausch unter den Fachkollegen einleiten, der vom Landesinstitut zusammen mit dem Autor angeregt und begleitet werden soll.

Als erster Schritt auf diesem Wege dient die Veröffentlichung des vorliegenden Heftes zum Thema "Proportion". Obwohl hier Grundsatzprobleme eines curricularen Schwerpunktes der Sekundarstufe I im Anschluß an die internationale fachdidaktische Diskussion erörtert werden, soll damit doch keine fertige "didaktische Position" vertreten werden. Das Heft will vielmehr didaktische Fragen neu stellen, um sie einer unterrichtspraktischen Diskussion zuzuführen, die das didaktische Urteilsvermögen für eine angemessene Umsetzung von Richtlinien und Lehrplänen schärfen und vertiefen soll.

Paul Hamacher

UUL 7

VORBEMERKUNG

Mit dem vorliegenden Heft der Reihe Curriculum wird der erste Baustein des "Didaktischen Informationsdienstes Mathematik" veröffentlicht.

Bei der Erarbeitung des Heftes konnte auf Dienste des Landesinstituts zurückgegriffen werden, die sich insbesondere auf Dokumentation, Datenerhebung und Beratung bezogen. In diesem Zusammenhang danke ich Frau Nemenyi-Arndt und den Herren Heczko, Straub und Dr. Vogel für die Beschaffung und Bereitstellung der in- und ausländischen Literatur sowie den Herren Dr. Haenisch, Dr. Hahn und Dr. Tack für die Durchführung der Umfrage, die fachliche Beratung und die Unterstützung bei der Redaktion und Drucklegung.

Mein besonderer Dank gilt vor allem den Fachkollegen im Lande Nordrhein-Westfalen, die mit ihren detaillierten Antworten auf die Umfrage dazu beigetragen haben, die Erfahrungsbasis der didaktischen Analysen wesentlich zu verbreitern.

Dr. Bernhard Andelfinger

0 DER DIDAKTISCHE INFORMATIONSDIENST MATHEMATIK (DID-M)

Der "Didaktische Informationsdienst Mathematik", kurz: DID-M, ist eine Dienstleistung des Landesinstituts.
DID-M soll vorwiegend Mathematiklehrer der Sekundarstufe I ansprechen, aber auch Fachdidaktiker, Planungsgruppen und alle am Mathematikunterricht Interessierten.

DID-M beinhaltet fachwissenschaftliche und fachdidaktische Analysen des gegenwärtigen mathematischen Schulstoffes der Sekundarstufe I, vor allem aber eine systematische Dokumentation des aktuellen Erkenntnisstandes der Unterrichtsforschung.
Aus dem Vergleich von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und empirischen Erfahrungswerten heraus macht DID-M auch Vorschläge zu Unterricht und Lehrstoffgestaltung.

0.1 Ziele von DID-M

Informieren

Dem Mathematiklehrer ist häufig nur methodisch-didaktisch aufbereitete Literatur zugänglich.
DID-M möchte dagegen über vorliegende Erfahrungen mit dem Mathematikunterricht, über Eigenschaften und Probleme des Lehrens und Lernens von Mathematik berichten.
Diese Erfahrungen liegen oft verstreut in Zeitschriftenaufsätzen, grauen Papieren usw. vor. DID-M sammelt und ordnet sie, macht sie dem Praktiker leicht zugänglich.

Entscheidungshilfen bieten

Weder der fachwissenschaftliche Hintergrund noch das Wissen um Wirkung des Mathematikunterrichts auf den Schüler bieten - je für sich allein genommen - dem Lehrer hinreichende Hilfen für seinen Unterricht.

DID-M versucht daher, die wichtigsten Komponenten des Unterrichts - Fachwissenschaft, Fachdidaktik und empirische Erfahrungswerte - miteinander zu vergleichen und hieraus für den Lehrer Entscheidungshilfen anzubieten.

Bedingungen für Unterricht aufzeigen

DID-M möchte - soweit das überhaupt möglich ist - einige wichtige Zusammenhänge zwischen Lehren und Lernen, zwischen Lehrer und Schüler, zwischen Stoff und Adressat aufhellen und bewußt machen.
DID-M findet so seinen Platz in der Lehrerausbildung, in der organisierten Lehrerfortbildung und in der täglichen Eigenarbeit des Lehrers.

Lehrer einbeziehen

Durch spontane Umfragen bei Lehrern zu wichtigen Schlüsselstellen des Unterrichts kann DID-M seine Literatur-Recherchen aktuell und "schulnah" halten.
Durch Erprobung der DID-M-Produkte bei Lehrern kann die Validität seiner Aussagen verbessert werden.

0.2 Methoden von DID-M

Im fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Teil bedient sich DID-M der Verfahren der Sachanalyse und der fachdidaktischen Analyse.

Im Bereich der Sammlung von Erfahrungswerten verwendet DID-M die Verfahren der Literatur-Recherche sowie spontaner Umfragen bei (zufällig) ausgewählten Lehrern.

Die Zusammenschau fachwissenschaftlicher, fachdidaktischer und empirischer Komponenten erfolgt durch vergleichende Analysen.

Das Angebot unterrichtlicher Entscheidungshilfen geschieht unter der Prämisse von Zielen, die zum großen Teil aus der Zusammenschau aller genannten Komponenten gewonnen werden.

1. EINFOHRUNG

"Es muß in unserem Rechen- und Mathematikunterricht etwas grundsätzlich falsch sein. Es muß ein tiefliegender Fehler sein, an dem unser Unterricht krankt. Kleine Mittel und Mittelchen, mit denen man den Unterricht seit Jahrzehnten zu fördern sucht, nutzen offenbar nichts, wenn der Fehler im Grundsätzlichen liegt."
W. Breidenbach

1.1 Zur Situation des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I

Aufgabe des Mathematikunterricht ist es, dem Schüler Einblick in mathematische Tätigkeiten und systematisches Denken zu geben, ihm einen Eindruck von der Anwendungskraft der Mathematik, ihrer Entwicklung und gesellschaftlichen Bedeutung zu vermitteln.
Die Realität des Mathematikunterrichts an der Schule ist jedoch oft von Irritation, Erfolglosigkeit, Motivationsmangel und - beim Lehrer - von großer Verlassenheit gekennzeichnet.

Ganz offensichtlich spricht der seither übliche Weg, das vorgegebene mathematische System dem Schüler "vereinfacht" nahezubringen, in der Sekundarstufe I nur eine geringe Minderheit von Schülern an. Methodische Kniffe, Einsatz von interessanten Medien, Auflockerungsübungen durch Computer o.ä. sind Mittel und Mittelchen, die letztlich nichts an dieser Tatsache ändern.

Wir sind zur Zeit weit davon entfernt, Vorschläge für eine schnelle Behebung dieser Probleme machen zu können - nicht zuletzt deshalb, weil ein großer Teil der didaktischen Forschungskapazität für die Entwicklung immer neuer methodischer Modelle und nicht für eigentliche Unterrichtsforschung verwendet wird.
(Einen guten Oberblick über den derzeitigen Stand der Unterrichtsforschung gibt FEY [1979].)

1.2 Was das hier vorliegende Heft will

International betrachtet beginnt sich eine recht praktisch orientierte Einstellung zum Mathematikunterricht zu entwickeln: Mathematikunterricht wird einfach als Kommunikation zwischen Lehrer und Schülern im Felde der Mathematik aufgefaßt, d.h. als Wechselspiel zwischen Partnern. Jeder Partner bringt Kenntnisse, Einstellungen, Erwartungen usw. mit und entwickelt diese im Kontakt miteinander weiter.
Ein Beispiel: Der Lehrer beabsichtigt, in Klasse 6 von den Brüchen ausgehend die Dezimalzahlen einzuführen; er folgt hierbei also einem mathematischen System. Die Schüler werden ihm erklären, daß sie schon lange Dezimalzahlen kennen und man ganz leicht mit ihnen rechnen kann. Das ist eine normale Situation, mit der der Lehrer nun fertig werden muß; ob es hier letztlich "Sieger" und "Besiegte" gibt, ob es anschließend noch an Dezimalzahlen interessierte Schüler gibt, ob es anschließend noch einen Lehrer gibt, der Dezimalzahlen als besondere Brüche einführt - das alles hängt vom Kommunikationsprozeß ab.

Ganz wichtig aber ist: Wir Lehrer können beim Unterrichten von Mathematik nur dann einen Schritt weiter kommen, wenn wir mehr Informationen über diesen Kommunikationsprozeß haben und diese Informationen uns bewußt machen.

Das in diesem Heft vorgelegte Material gibt solche Informationen über das Lehren und Lernen im weiten Bereich der "Proportion" und der mit ihm zusammenhängenden Bereiche der Schulmathematik der Sekundarstufe I.
Es bedient sich hierbei - wie im vorigen Abschnitt beschrieben - der fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Analyse. Sein Schwerpunkt liegt aber bei der Auswertung unterrichtlicher Erfahrungswerte; dies ist gleichzeitig seine Besonderheit.
Hierzu wurden mehrere Hundert empirische Forschungsarbeiten (vorwiegend aus den Jahren 1950 - 1980) aus aller Welt gesammelt und gesichtet. Außerdem sind die Ergebnisse einer Lehrerbefragung in Ge-

samtschulen, Gymnasien, Hauptschulen und Realschulen des Landes Nordrhein-Westfalen eingearbeitet.

Das Material ist kein vorgefertigtes Unterrichtsmodell und keine methodische Wunderkniffkiste. Es will vielmehr dem Lehrer aufgrund konkreter Informationen Entscheidungsmittel für sein Handeln im Unterricht zur Verfügung stellen.

Die Texte sind zur Erhöhung der Lesbarkeit ohne umfangreiche Quellenangaben geschrieben.
Das vollständige Quellenmaterial (bibliografische Daten mit kurzen Abstracts) samt den Daten der Lehrerbefragung ist zugänglich. Es liegt gesammelt vor und kann über das Landesinstitut bezogen werden (DIDAKTISCHER INFORMATIONSDIENST MATHEMATIK
Thema: Proportion (Quellensammlung).
Die meisten der Quellenoriginale können im Landesinstitut (Referat Dokumentation) eingesehen werden.

1.3 Zur Wahl des Themas

Man könnte annehmen, daß es wichtigere und problematischere Felder des mathematischen Unterrichts gibt als die Proportion.
Auffällig ist jedoch, daß es zu diesem Themenbereich (samt seinen Querverbindungen) unverhältnismäßig viele Forschungsarbeiten und fachdidaktische Beiträge gibt.
In letzter Zeit hat vor allem Freudenthal immer wieder darauf hingewiesen, daß die Proportion als eine Leitlinie des mathematischen Unterrichts aufgefaßt werden sollte.
Auch der Streit um die Zielsetzungen dieses Bereichs, seine Methoden und Wirkungen ist auffällig.
Klagen von Lehrern und Schülern - je aus unterschiedlichen Gründen - gerade in diesem Bereich wollen nicht verstummen.

Und so haben wir, die am Projekt Beteiligten, beim Eindringen in den gewählten Themenbereich eine ganze Reihe von Oberraschungen und unerwarteten Konsequenzen vorgefunden, gleichzeitig eine hohe Übereinstimmung von Ergebnissen der empirischen Forschung und der Einschätzung der Lage durch Lehrer.

Dies hat uns dann bewogen, als erstes Thema in der Reihe "Didaktischer Informationsdienst Mathematik" die Proportion zu wählen.

Analysen I (Fachwissenschaft und Fachdidaktik)

2 DER BEREICH "PROPORTION" IN FACHWISSENSCHAFLICHER SICHT

Da es sich um ein mathematisches Thema handelt, liegt der Blick in die Fachwissenschaft zunächst nahe. Hierbei erlebt man die erste Überraschung: In vielen Lehrgängen und Wörterbüchern der Mathematik kommt dieser Begriff gar nicht vor!
Warum eigentlich? Ein Hauptgrund liegt in der Tatsache, daß das Problem des Verhältnisses a : b ein "eingebettetes" Problem ist und keine eigene Theorie bildet wie etwa der Funktionsbegriff.
Die Frage nach dem "Verhältnis a : b" kommt innerhalb der Theorie der rationalen Zahlen, der Theorie der reellen Zahlen, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Theorie von den Funktionen und Abbildungen vor (um nur die wichtigsten zu nennen).

2.1 Algebraische Aspekte

- Im Sinne der Theorie der rationalen Zahlen ist eine Proportion a : b eine Äquivalenzklasse, also letztlich ein Bruch a/b. Aus dieser Tatsache folgt, daß eine Proportion durch "die Gleichheit von Verhältnissen" ausgedrückt werden kann; insbesondere gilt:
  a : b = ka : kb.
  Diesen theoretischen Hintergrund benützen wir im Unterricht, wenn wir z.B. ausgehend von der Bruchrechnung die %-Rechnung oder (allgemeiner) das "Anteilrechnen" bzw. "Verhältnisrechnen" durchführen. Bei der %-Rechnung wählen wir für die jeweilige Äquivalenzklasse den Bruch-Repräsentanten aus, der den Nenner 100 hat.

- Der Gesichtspunkt der Äquivalenz spielt auch bei der Bildung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs eine entscheidende Rolle, sofern es sich um Gleichverteilung handelt: wir bezeichnen die Chancen bei "2 von 6 Möglichkeiten" als gleich mit "1 von 3 Möglichkeiten", nämlich 1/3.

Hinzukommt, daß die Wahrscheinlichkeiten dann noch maßtheoretische Eigenschaften besitzen, nämlich daß z.B. die Summe der Wahrscheinlichkeiten (bezogen auf ein Experiment) 1 ist etc.

o In der Theorie der reellen Zahlen und der damit zusammenhängenden Wissenschaftsgeschichte geht es um die Eigenschaften von Proportionen:

Hat man zwei Maßzahlen a und b, so ist jetzt die Frage, ob sie kommensurabel sind oder nicht. Kommensurabel sind sie dann, wenn es ein rationales k mit a : b = k gibt; geometrisch gesprochen entscheidet über Kommensurabilität die Existenz einer Vergleichsstrecke mit rationaler Länge.
Die Tatsache, daß es Maßzahlen a, b gibt, die inkommensurabel sind - z.B. die Maßzahlen von Quadratdiagonale und Quadratseite - war in der Wissenschaftsgeschichte eine Sensation. Der heutige Schulunterricht unterdrückt diese "porportionale Problemseite" an den reellen Zahlen meist und ersetzt sie durch näherungsweise Konstruktion irrationaler Dezimalbrüche - was u.a. zur Folge hat, daß Schüler unter "reell" meist "irrational" verstehen.

2.2 Funktionale Aspekte

o Die lineare Funktion $f : x \longrightarrow ax$ wird oft als "(direkte) Proportionalität" bezeichnet, denn für alle $x \neq 0$ gilt:

$$a = f(x) : x.$$

a ist der "Proportionalitätsfaktor" und geometrisch gesehen die Steigung des Funktionsgraphen.
Die lineare Funktion mit Steigung a liefert über die Quotienten aus Funktionswert und Argument alle Elemente der Äquivalenzklasse a, sie erzeugt also beliebig viele "gleiche Verhältnisse".
Dieser theoretische Hintergrund wird im Schulunterricht verwendet, wenn z.B. Mengen quotientengleicher Paare zur Motivation von Dreisatzaufgaben eingeführt werden; oder wenn Dreisatzaufgaben grafisch dargestellt werden; oder wenn Dreisatzaufgaben unter Benützung des Einheitspreises (= Steigung der Geraden) gelöst werden.

o Die allgemeine lineare Funktion $f : x \longrightarrow ax + b$ läßt sich als eine "verallgemeinerte Proportionalität" auffassen. Es gilt hier für alle x_1, x_2:

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad (x_1 \neq x_2).$$

Der Differenzenquotient liefert hier also eine Aquivalenzklasse, dargestellt durch die Steigung der Geraden.
Wir benützen diesen Zusammenhang im Unterricht bei allen Sachaufgaben, die - wie z.B. Taxameterprobleme oder Tarifprobleme - mit einem von 0 verschiedenen Grundbetrag beginnen und ansonsten einen linearen Zusammenhang der beteiligten Variablen aufweisen.

Als wichtig bleibt festzuhalten: die "Proportionalität" als Funktion erzeugt "Verhältnisse" und stellt je eine Äquivalenzklasse dar.

o Die Reziprokfunktion $f : x \longrightarrow a : x$ wird oft als "indirekte Proportionalität" oder "Antiproportionalität" bezeichnet. Dieser Sprachgebrauch ist zunächst innerhalb der Theorie der Funktionen gemeint, als eine Art von Gegenbegriff zur linearen Funktion; sein Sinn spiegelt sich auch im "gegenläufigen" Zusammenhang von Funktionswert und Argument wieder, der einem "gleichläufigen" Zusammenhang bei der linearen Funktion gegenübersteht.
Bei der Reziprokfunktion $f : x \longrightarrow a : x$ gilt für alle $x \neq 0$:

$$a = x \cdot f(x)$$

Diese Tatsache benützen wir, wenn wir im Unterricht antiproportionale Zusammenhänge über Mengen produktgleicher Paare einführen.

Als wichtig bleibt festzuhalten: die "Antiproportionalität" ist ein funktionaler Zusammenhang; sie hat mit "Proportionen" nichts zu tun. Dieses Problem - das sich in großen unterrichtlichen Schwierigkeiten mit der Antiproportion niederschlägt - wird uns noch sehr beschäftigen.

Um keine Verwirrung aufkommen zu lassen, verwenden wir den Sprachgebrauch "Proportionalität" und "Antiproportionalität" im funktionalen Sinne; "Proportion" ist algebraisch gemeint (Äquivalenzklasse a/b).

- Faßt man die linearen Funktionen bzw. die reziproken Funktionen als Funktionsklassen auf, so gewinnen die Faktoren a in $f : x \longrightarrow ax$ und k in $g : x \longrightarrow k : x$ noch eine weitere Bedeutung: sie geben an, wie groß der Affinitätsfaktor einer (zur x-Achse) senkrechten Affinität ist, die die "Einheitsfunktion" $x \longrightarrow x$ bzw. $x \longrightarrow 1 : x$ in f bzw. g überführt.

  Wir benützen solche affinen Transformationen im Schulunterricht, wenn wir z.B. dieselbe Dreisatzaufgabe unter verschiedenen Wareneinheitspreisen durchrechnen lassen.

- Proportionale Probleme kommem auch im Zusammenhang mit Wachstumsfunktionen vor:
  lineares Wachstum liegt vor, wenn wir mit der kip-Formel innerhalb eines Jahres oder über ein Jahr hinaus "rücksichtslos" arbeiten. Wenn wir jeweils am Jahresende zu einem Kapitel den Zins zuschlagen, ihn aber innerhalb des Jahres nach der kip-Formel linear wachsen lassen, erhalten wir eine "getreppte Linearfunktion". Wenn wir "stetige" Verzinsung annehmen, kommen wir zu Exponentialfunktionen.
  Allen Wachstumsproblemen ist gemeinsam, daß Proportionen als Differenzenquotienten auftreten und es mathematisch gesehen um Veränderung dieser Differenzenquotienten geht. Damit stehen wir hier an der Grenze zur Differentialrechnung, die das Maß der Veränderung von Differenzenquotienten bzw. Steigungen durch Ableitungen ausdrückt.
  Im Schulunterricht wird häufig übersehen, daß es bei Wachstumsbetrachtungen um Differenzenquotienten und deren Änderung geht, also um sehr komplexe mathematische Begriffsbildungen.

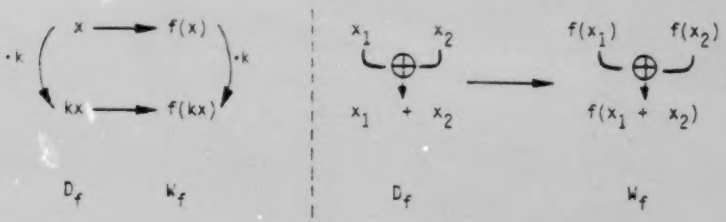
2.3 Strukturelle Aspekte

Für eine direkte Proportionalität $f : x \longrightarrow ax$ gilt:

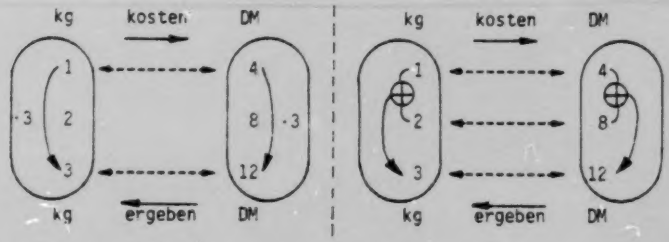
$$kx \longrightarrow k(ax) \qquad \text{also:} \quad f(kx) = k \cdot f(x)$$

$$x_1 + x_2 \longrightarrow ax_1 + ax_2 \qquad \text{also:} \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Diese Funktionseigenschaften der Linearität vermitteln eine Isomorphie zwischen dem Definitionsbereich D_f und dem Wertebereich W_f bezüglich der oben erwähnten Multiplikation und Addition:



Diesen Isomorphismus benützen wir, wenn wir im Schulunterricht proportionale Probleme nach dem "guten alten Dreisatz" lösen:



Die Antiproportionalität vermittelt keinen Isomorphismus.
Im Schulunterricht wird allerdings oft das obige Schema mit "gegenläufigen Rechnungen" verwendet, was nur im linken Falle klappt (Multiplikation vs. Division).

2.4 Geometrische Aspekte

o Die Proportion tritt in der Abbildungsgeometrie im Gewande des Teilverhältnisses auf. Es ist ein Kennzeichen aller affinen Abbildungen, daß sie Teilverhältnisse invariant lassen. Das Teilverhältnis ist ein Verhältnis von Streckenlängen; ein Teilverhältnis kennzeichnet alle Streckenpaare, deren Maßzahlenquotient zur gleichen Äquivalenzklasse gehört.
Im Schulunterricht tritt die Proportion als Teilverhältnis vor allem bei den Strahlensätzen auf. Hier geht es um das Ablesen "gleicher Verhältnisse", also um das Finden einer Proportion. Es wird oft übersehen, daß das mathematische Problem der Strahlensätze darin besteht, daß der Schüler Verhältnisgleichheiten erkennt und diese mit einer Proportion in Zusammenhang bringt.

o Die Abbildungsgeometrie kennt noch eine weitere wichtige Verwendung der Proportion: sie verwendet Porportionalitätsfaktoren u.a. zur Kennzeichnung von Abbildungen. So werden senkrechte Affinitäten und Streckungen z.B. durch Angabe von Achse bzw. Punkt und Affinitätsverhältnis bzw. Streckungsverhältnis definiert.
Dies ermöglicht die Konstruktion von Bildpunkten aus Urpunkten unter Anwendung von Verhältnissen aus derselben Äquivalenzklasse.
Beispiel: eine Streckung mit Streckungsverhältnis 3 entfernt einen Urpunkt, der 2 cm vom Zentrum weg liegt, auf 6 cm, weil $1 : 3 = 2 : 6$.
Gleichzeitig lassen diese Abbildungen alle in Urfiguren vorhandenen Teilverhältnisse invariant.
Im Schulunterricht wird oft übersehen, daß z.B. bei der zentrischen Streckung zwei Sorten von Proportionen vorkommen: die "konstruktive Proportion" des Streckungsfaktors und die "figurengebundenen Proportionen", z.B. Streckenverhältnisse auf Strahlen etc.

o Mit Hilfe der "figurengebundenen" Proportionen werden schließlich die Ähnlichkeitsabbildungen definiert. Hier handelt es sich um Abbildungen, die Winkel und Seitenverhältnisse invariant lassen. Mit dieser Art von Proportionen haben wir es zu tun, wenn wir im

Unterricht z.B. die Ähnlichkeitssätze behandeln. Sie stehen allerdings in engem Zusammenhang mit Winkelinvarianzen und könnten deshalb als "formgebundene Proportionen" bezeichnet werden.

In der Geometrie haben wir demnach die Proportion vor allem in drei Rollen: als (eine Abbildung) "kennzeichnende" Proportion, als eine "figurengebundene" Proportion und als eine "formgebundene" Proportion.

2.5 Fazit und Oberblick

Jede schulmathematische Aufgabenstellung im weiten Bereich der "Proportion" hat ihren fachwissenschaftlichen Ort, aber der schulmathematische Komplex "Proportion mit ihren Anwendungen" hat keine entsprechende geschlossene mathematische Hintergrundtheorie. Dazu sind die Aspekte zu zahlreich, das Erscheinungsbild der Proportion zu vielfältig.

Das folgende Schema soll eine vorläufige Orientierungshilfe für Beziehungen zwischen Schulstoffen und Bereichen der Fachwissenschaft, soweit sie Proportionen betreffen, sein:

wissenschaftliche Aspekte / schulische Themen	algebraisch				funktional				Struktu-rell	geometrisch		
	Äquivalenz	Quotient	Kommensurabilität	Maßaspekt	linear	reziprok	Klassenaspekt	Wachstumsaspekt	Isomorphie	Prop. zur Kennzeichnung einer Abbildung	Proportion als Teilverhältnis	Proportion als Invariante
Verhältnis		X										
Verhältnisgleichheit (Proportion)	X											
relative Häufigkeit Wahrscheinlichkeit	X	X		X								
% - Rechnung	X			X								
Zinsrechnung					X			X				
Proportionalität					X		X					
Antiproportionalität						X	X					
proportionales Schlußrechnen					X				X			
antiproportionales Schlußrechnen						X						
zentrische Streckung										X	X	X
Ähnlichkeit												X
reelle Zahl	X	X	X									
Trigonometrische Funktion										X		X
exp								X				

3 DER BEREICH "PROPORTION" IN DEN LEHRPLÄNEN

3.1 Grundaufbau mathematischer Lehrpläne der Sekundarstufe I

Es gibt in den Lehrplänen keinen geschlossenen Bereich "Proportion", wenngleich proportionale Probleme - viel stärker als in der Fachwissenschaft - geblockt vorkommen. Dies ist der Fall bei den Anwendungen der Bruchrechnung im sogenannten "Sachrechnen" in Klasse 6 und 7, bei den linearen Funktionen und gelegentlich etwa bei der Behandlung von Exponentialfunktionen.

Die Proportion ist keine Leitlinie des mathematischen Lehrplans. Alle Sekundarstufe I-Lehrpläne haben - unabhängig von Schulart und Bundesland (mit Ausnahme einiger Sonderschulpläne) - dieselbe Kernlinie, nämlich die Zahlbereichserweiterungs-Kette von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, verbunden mit den jeweiligen algebraischen Aktivitäten.
Dieser Kette ist eine eng korrespondierende Linie von Funktionsklassen zugeordnet und eine locker korrespondierende Linie der Geometrie der Abbildungen.
Das sieht dann ungefähr so aus:

Jahrgangs-stufe	5	6/7	7/8	9/10
Linie der Ausbildungs-klassen	geometrische Propädeutik	- Kongruenz	-	Ähnlichkeit
Kernlinie: Zahlbereichs-kette	$\mathbb{N}$	$\subset$ $\mathbb{B}$	$\subset$ $\mathbb{Q}$	$\subset$ $\mathbb{R}$
Linie der Funktions-klassen	Relation-lineare F.	- quadrat. F.	- Potenzf.	- exp, log, trigon. F.

Der Aufbau ist über die Jahre hinweg streng linear, ohne Spiralcharakter. Es wird kein "Aushaken" der Schüler an irgendeiner Stelle angenommen. Vielmehr wird unterstellt, daß der Lernprozeß dieser Kette entlang läuft.

Wenn wir mit den Ergebnissen von Abschnitt 2 vergleichen, so wird deutlich, daß die Lehrpläne die fachwissenschaftliche Struktur gut abbilden. Die globale Ordnung geschieht nach wissenschaftlichen Gebieten; auch neue Pläne halten diese Grundordnung aufrecht. Alle weiteren Aspekte und Zielbereiche, vor allem auch neu hinzugekommene, werden einzelnen Stellen in diesem Grundaufbau zugeordnet, wo sie eben am besten passen. Der Grundaufbau wird nicht angetastet. Dies wird besonders deutlich am proportionalen Aspekt.

3.2 Wo und wie treten proportionale Aspekte auf?

In Klasse 5 soll einfaches Schlußrechnen geübt werden, wobei auf Teilbarkeit geachtet wird, denn es stehen ja erst die natürlichen Zahlen zur Verfügung.
In Klasse 6 wird beim Bruchrechnen die Äquivalenzklasse als eine wichtige Grundlage angegeben, denn auf ihr basieren ja alle Techniken im Umgang mit Brüchen. Der proportionale Gedanke dabei wird nicht besonders erwähnt.
Die %-Rechnung und die Wahrscheinlichkeitsrechnung sind der Bruchrechnung als "Anwendung" angelagert (vergleichbar der Lehre von den Dezimalzahlen).
Das eigentliche proportionale Schlußrechnen, in Klasse 7 (6) beheimatet, steht weitgehend unter funktionalen Gesichtspunkten. Sie treten in zwei methodischen Gewändern auf:

- Rechnen in Paarmengen
- Rechnen auch unter Verwendung grafischer Mittel, im Themenbereich "Relation/Zuordnung/Funktion".

Der erste Gesichtspunkt "Paarmengen" - ohne weitere Hintergrundtheorie - wird z.B. in der Realschule Nordrhein-Westfalen betont und zu einer eigenen kleinen Theorie ausgebaut. Hier werden summengleiche/differenzengleiche/produktgleiche/quotientengleiche Paare ausgerechnet.

Das Gymnasium und die Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen ordnen das Schlußrechnen ganz dem Themenbereich "Funktionen" zu, wobei das Gymnasium die Hintergrundtheorie der Relationen, des kartesischen Produkts etc. einbezieht und die Gesamtschule den Akzent der Anwendung verstärkt.

Bei Einführung von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ treten proportionale Gesichtspunkte nicht auf, auch bei der Deutung von $\mathbb{Y}$ wird der Verhältnisaspekt zugunsten des Intervallschachtelungsprinzips zurückgedrängt. Allerdings fehlt in keinem Schulbuch der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ mit Hilfe der - zu widerlegenden - Bruchdarstellung; der entscheidende Gedanke in diesem Bereich ist die Unkürzbarkeit.

Die funktionale Linie des Lehrplans und die Zuordnung des Schlußrechnens in diesem Bereich erlaubt die Einbeziehung der Antiproportionalität.
Die Lehrpläne sehen bei der Behandlung von Funktionen nach Klasse 7 kaum mehr proportionale Gesichtspunkte vor.

Im geometrischen Bereich, der ohnehin oft stark verkürzt ist, werden proportionale Gesichtspunkte erwähnt, oft aber gleich wieder relativiert. So betont z.B. der Realschulplan von NW, daß Begriffe wie "formgleich" oder "winkeltreu" zwar die Vorstellungsgrundlage von Ähnlichkeit stützen, aber nicht zur Definition von Ähnlichkeit benutzt werden sollen.

Auffällig ist, daß der Lehrplan für die Berufsaufbauschule die Verbindung von Geometrie/Bruchrechnen/Verhältnisrechnen ausdrücklich erwähnt, besonders bei den Strahlensätzen.

3.3 Fazit

Die Lehrpläne gehen davon aus, daß fachsystematische Leitlinien über Jahre weg Lernprozessen adäquat sind.
Im Kern wird angenommen, daß die Erweiterung des Zahlenverständnisses ein Hauptziel ist und daß diese Erweiterung im Sinne einer Erweite-

Es wird weiter angenommen, daß sich von diesem Kern-Lernvorgang aus alle anderen Lernlinien - wiederum systematisch angelegt - ergeben und zuordnen.
So erfolgt das Erlernen des 2. Hauptziels "Funktion" entlang einer aufsteigenden Kette von Funktionsklassen; das geometrische Lernen läuft der Abbildungskette entlang (3. Hauptziel).

Die Rolle des proportionalen Denkens beim Erwerb von Zahlenvorstellungen wird nicht hervorgehoben. Seine weiteren Aspekte und Verwendungsbereiche sind Abfallprodukte der systematischen Linien.
Es wird als "irgendwie vorhanden" vorausgesetzt; lediglich die Berufsaufbauschule kommt darauf nochmals zu sprechen.
Es wird dort zugeordnet, wo sich fachwissenschaftliche Berührungspunkte ergeben (s. Abschnitt 2). Hauptsächlich werden Berührungspunkte aber im Rahmen des Themenbereichs "Funktionen" gesehen.
Im übrigen firmiert es meist unter "Sachrechnen" und gerät dort unter die "Konkurrenz" der Statistik.

3.4 Kritische Gedanken

Es fällt auf, daß die Vorgänger unserer heutigen Pläne in mehrfacher Hinsicht anders waren.
Zunächst waren vergleichbare Themenstellungen um ca. 1 Jahr später im Schulstoff, der demnach in der Sekundarstufe I (und der Sekundarstufe II) nicht so weit reichte wie heute.
Der Plan war nicht so systematisch angelegt und dem sogenannten "bürgerlichen" Rechnen war ein viel breiterer Raum gewidmet.
Die Zahlbereiche waren nicht so scharf getrennt und nicht so streng geordnet; die Geometrie war breiter und bot auch viele algebraische Fragen.

Insofern spiegeln die heutigen Pläne natürlich (auch) fachwissenschaftliche Entwicklungen.
Haben sich unsere Schüler gemäß der Fachwissenschaft entwickelt?

An dieser Stelle kommen Fragen auf:
Ist das Verständnis rationaler/reeller Zahlen linear fortschreitend von Unter- zu Oberstrukturen erreichbar? Ist das auch eine Motivation für das Lernen?
Pflegt(e) das "bürgerliche Rechnen" etwa - ohne daß es bewußt wird - proportionale Vorstellungen, die dann ihrerseits entscheidenden Einfluß auf den Erwerb von Zahlenkonzeptionen haben?
Sind heute Verfrühungen und Antizipationen vornanden, die durch die streng lineare Anordnung des mathematischen Lehrgangs verheerend wirken, wenn einer mal aushakt? Denken wir an Mängel in der Bruchrechnung und ihre weiteren Auswirkungen; überlegen wir auch einmal, ob wir im Unterricht linear vorgehen, ob und wo wir Rückgriffe, Wiederholungen etc. machen.

Spätestens an dieser Stelle wird jetzt deutlich, daß ohne genaue Betrachtung von Erfahrungswerten nicht weiterzukommen ist.

Wir untersuchen zunächst die aktuelle fachdidaktische Diskussion überblickhaft und anschließend empirische Erfahrungswerte sehr detailliert.

4 DER BEREICH "PROPORTION" IN DER FACHDIDAKTISCHEN DISKUSSION

4.1 Die Zieldiskussion

Eine eigentliche Zieldiskussion um "Proportion" gibt es nicht. Es gibt allerdings eine sehr vehemente Diskussion um Zielsetzungen des Mathematikunterrichts, wobei der Wissenschaftsorientierung das Ziel der Anwendungsorientierung und gesellschaftlichen Relevanz gegenübergestellt wird.
In dieser Diskussion spielt die Proportionalität eine Rolle, weil mit ihrer Hilfe viele außermathematische Phänomene bearbeitet werden können.
Dies hat auch dazu geführt, daß proportionale Gesichtspunkte in den Abschlußklassen der Sekundarstufe I gelegentlich erwähnt werden. Denn die Exponentialfunktion bietet die Möglichkeit, Wachstumsprobleme anzugehen und hierbei tritt proportionales Rechnen auf.

Im Rahmen der erwähnten Globaldiskussion kommen Ziele aus den Gebieten Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik sowie Algorithmik/Informatik stärker in den Blick.
Die Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bringt das Problem proportionaler Betrachtungen mit sich; bei der Algorithmik/Informatik werden Proportionen als Quotienten verarbeitet.

Proportion und Proportionalität sind in der allgemeinen Zieldiskussion also eher ein Abfallprodukt.

4.2 Die Methodendiskussion

Die Methodendiskussion ist natürlich eng mit der Zieldiskussion verbunden; dies wird bei den folgenden Ausführungen sicher deutlich. Es sollen vor allem betrachtet werden: Bruchrechnung; die sogenannten "Anwendungen der Bruchrechnung" (%-Rechnung, Wahrscheinlichkeits-

rechnung, Statistik), Sachrechnen, lineare und reziproke Funktion, Geometrie.

o In der Bruchrechnung gibt es z.Zt. 2 methodische Hauptrichtungen:

- das "regionale" Modell, in dem Brüche durch Aufteilung eines Ganzen, einer "Region", gewonnen werden. Brüche sind dann "Teile eines aufgeteilten Ganzen";
- das "operative" Modell, in dem Brüche durch Maschinen dargestellt und erzeugt werden.

In der Praxis trifft man meist Mischungen davon an. Denn die Bruchmaschine a/b läßt sich gut durch regionale Vorstellungen (s.o.) konkretisieren.
Die Äquivalenzklasse a/b wird in beiden Fällen über die Vorstellung gewonnen, daß a Teile von einem b-geteilten Ganzen gleich ka Teilen von einem kb-geteilten Ganzen sind.

Die Methodik hat nun damit zu kämpfen, daß die von ihr selber erzeugte Bindung der Bruchvorstellung an die Aufteilung eines Ganzen sich als hemmend erweist.

o Man kann ja Zahlen auch einfach "zueinander ins Verhältnis" setzen und dies ist in der Praxis oft sogar wesentlich und natürlich. Denken wir an ein Experiment mit 2 Urnen mit weißen und schwarzen Kugeln:

Wo ist die Chance, "weiß" zu ziehen, größer? Natürlich links, da $2 : 3 > 2 : 4$!
Auch Aufgaben wie "2/3 von 5" setzen ein proportionales Verständnis voraus. Sie sind zwar über den Bruchaspekt "Teil eines Ganzen" lösbar, werden in aller Regel jedoch so nicht erfaßt und interpretiert.

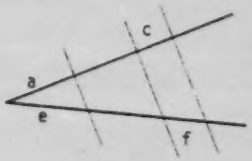
Vielmehr ist es hier die Aufgabe, 5 im Verhältnis 2 : 3 aufzuteilen. Wir wissen aus Erfahrung, daß dieser Aufgabentyp für Schüler unerwartet schwierig ist. Gleichzeitig sei jedoch betont, daß dieser Aufgabentyp die Schlüsselaufgabe für die %-Rechnung und ihre Verwandten ist.

Die Methodik reagiert i.A. auf diese Probleme entweder durch Annehmen und Voraussetzen eines proportionalen Verständnisses beim Schüler oder durch Rückführung auf die Bruchrechnung.
Das Urnenexperiment führt dann auf 2/5 > 2/6,

2/3 von 5 ist dann (5 : 3) x 2,
p% von g ist dann (p : 100) xg.

Lehrgänge, die dem 1. Weg - Annahme bzw. Voraussetzung eines proportionalen Verständnisses - folgen, führen erfahrungsgemäß zu Unverständnis bei Schülern vom Ansatz her und daher bald zum "Rezeptlernen".
Auf dem 2. Weg geht ein wesentlicher und sehr natürlicher Aspekt des Problems verloren.

o Später in der Ähnlichkeitsgeometrie werden Bruchgleichungen als Verhältnisgleichungen gedeutet und umgekehrt. An den Figuren werden diese Gleichungen jedoch im Sinne von Verhältnissen interpretiert:



a : c = e : f

a : e = c : f

a : c hat aber mit der regionalen Bruchvorstellung überhaupt nichts zu tun; c ist nicht das Ganze, auf das a bezogen wird.
Und vor allem Freudenthal hat darauf hingewiesen, daß der mathematisch sonnenklare "Austausch" von Innen- und Außengliedern in einer Verhältnisgleichung aus verschiedenen Gründen für den Schüler ein riesengroßer "jump" ist.

o Die Methodik beim Schlußrechnen ist sich - nach all dem vorher Gesagten verständlich - sehr unsicher. Viele Schulbücher bieten einfach alle Methoden an: Formelrechnen, isomorphes Schlußrechnen, Bruchgleichungen etc.
Manche Methodiker und - wie wir gesehen haben - viele Lehrpläne sehen in der funktionalen Betrachtungsweise eine große Hilfe.
Es werden z.B. Mengen quotientengleicher Paare eingeführt, diese grafisch dargestellt und daraus dann Rechenverfahren (z.B. Wertetabellen mit Operatorpfeilen) wie Zeichenverfahren (Graphen ablesen) entwickelt.

Damit wird als Äquivalenzrelation die Relation "quotientengleich" eingeführt; Brüche werden als Quotienten gedeutet. Allerdings scheint bei Schülern die Quotientenvorstellung von Brüchen gering ausgebildet; dadurch ist dieses methodische Vorgehen behindert. Außerdem bleibt grundsätzlich zu fragen, wieweit die Schüler einen funktionalen Ansatz der Schlußrechnung aufnehmen.

Methodisch hat der funktionale Ansatz noch einen Vorteil. Es läßt sich - im Sinne mathematischer Eleganz - die Antiproportionalität zwanglos einfügen, nämlich über die Äquivalenzrelation "produktgleich".
Ob das ein ausreichendes Argument ist? Entspricht der Unterschied "quotientengleich/produktgleich" der Qualität des Unterschieds "gleichläufiges Variablenverhalten/gegenläufiges Variablenverhalten"?
Hinzukommt, daß Schüler zwischen proportionalen und antiproportionalen Fragestellungen zunächst überhaupt keinen Unterschied sehen:

proportional	antiproportional
"je mehr ich kaufe, umso mehr muß ich bezahlen"	"je schneller ich fertig werden will, umso mehr Arbeiter brauche ich"

Die Paare "mehr/umso mehr" und "schneller/umso mehr" sind vom normalen Verständnis her "gleichläufige" Variable. Erst die Übersetzung des "schneller/umso mehr" in "weniger Tage/umso mehr Arbeiter"

bringt die Antiproportionalität. Und diese Übersetzung widerspricht der normalen Spracherwartung, wirkt künstlich. (Dem entspricht, daß sich antiproportionale Aufgaben durch Einführung geeigneter Variablen, z.B. Leistung/Mann, in proportionale Aufgaben verwandeln lassen. Mathematisch gesehen ist dies in $f : x \longrightarrow a : x$ die Substitution $\overline{x} = 1/x$.)
Das Problem der Antiproportionalität liegt also möglicherweise nicht primär in ihrem Gegensatz zur Proportionalität, sondern an ihrer geeigneten Beschreibung durch Veränderung eines Variablenverständnisses.

o In allen Gebieten, wo Proportionen und Proportionalitäten vorkommen, kämpft die Methodik mit der Fülle der erscheinenden Variablen:

- bei einem Bruch a/b sind es schon 2 Variable, bei der Verhältnisgleichheit bereits 4 Variable.
  Dasselbe Problem besteht - wie wir später sehen werden - für den Schüler bei der Bruchrechnung. Er hat zwei Zahlen mit einer zu identifizieren und beim üblichen Bruchrechnen muß er meist mit 4 und mehr Variablen operieren.

- Verschärft wird das Variablenproblem bei allen Text-Sachaufgaben. Hier tritt im Text meist eine Fülle von Variablen auf, die oft ganz verschiedenen Ebenen angehören, die erst mal zu sehen und deren gegenseitiger Zusammenhang erst herzustellen ist. Die Methodik ist hier über Appelle an "genaues Lesen" noch nicht hinausgekommen.

Das Variablenproblem wird von der Methodik der Bruchrechnung zuerst gemildert, weil man Zähler und Nenner feste Bedeutung (im regionalen oder/und operativen Sinne) gibt: der Nenner gibt an, wie das (Ganze) geteilt wird, der Zähler gibt an, wieviele solcher Teile es sind / wie malgenommen wird.
Ob solche Einschränkungen des Variablenproblems weiterhelfen? Möglicherweise für den Moment. Aber a/b ist ja eine rationale Zahl und damit auch z.B. der Quotient a : b; diese Vorstellung ist schon wieder eine ganz andere als die oben genannte.

4.3 Fazit

Die Analyse der Methodendiskussion zeigt, daß Proportionsprobleme "andere" Seiten des Problems der rationalen Zahl mit hoher Anwendungsbedeutung sind.
Damit wird auch klar, daß proportionale Fragen nicht Anwendungen der regionalen oder operativen Bruchrechnung sind; diese Bruchrechnung leistet also überhaupt nicht so viel wie man von ihr systematisch-fachwissenschaftlich zu erwarten hätte. Mit anderen Worten: Die Bruchrechnung in Klasse 6 stellt kein Konzept der rationalen Zahl bereit, höchstens einige Aspekte von ihr; die Methodik bietet aber "Anwendungen" der Bruchrechnung in der Annahme, als sei ein Konzept der (positiven) rationalen Zahl vorhanden.

Ganz fraglich geworden ist, ob und welche Beziehungen zwischen Funktion und Proportion im mathematischen Lernvorgang bestehen.

Neu ins Blickfeld gerückt ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung (und Statistik) mit "natürlicherweise" proportionalen Problemen.

Ganz wichtig geworden ist die Frage nach dem Variablenverständnis und der Bewältigung von Variablenmengen - sei es im Zusammenhang mit rationalen Zahlen, sei es im Zusammenhang mit Texten oder der Geometrie.

Die Zieldiskussion läuft offensichtlich "oberhalb" dieser Probleme. Das ist ihr gutes Recht. Nur: ob die Schüler zu den dort diskutierten Zielen wirklich hinkommen, wenn sie z.B. schon im Zahlenverständnis blockiert sind?

Analysen II (Schülerverhalten)

5 GEWINNUNG UND DARSTELLUNG DER ERFAHRUNGSWERTE

5.1 Lehrerbefragung

Eine wichtige Grundlage für die Beschreibung des Schülerverhaltens im Bereich "Proportion" bildet die früher erwähnte Lehrerbefragung. Anonym und spontan äußerten sich hier Lehrer aller Schularten der Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen über ihre Beobachtungen bei Schülern.
Die Auswertung dieser Befragung zeigte zunächst, welche Aspekte der Proportion im Unterricht vorkommen und wie sie von Schülern aufgenommen werden.
Weiterhin ergab sich eine Liste von Merkmalen, mit deren Hilfe sich das Lernverhalten der Schüler praktisch beschreiben läßt.

Die befragten Lehrer nannten folgende für Schüler wichtige Aspekte der Proportion

- Umgehen mit Verhältnissen
- Umgehen mit dem Dreisatz
- Umgehen mit Funktionen
- Umgehen mit Sach- und Textaufgaben.

Probleme der Bruchrechnung und der Geometrie wurden nur kurz gestreift.

Jeder dieser Aspekte wurde im wesentlichen nach folgenden Merkmalen beschrieben:

- Image beim Schüler (der allgemeine Eindruck, den der Schüler vom Stoff hat bzw. gewinnt)
- Strategien, die Schüler anwenden; hierbei wurden jeweils verschiedene Unter-Gesichtspunkte genannt, z.B. Abhängigkeit der Strategien von der Beschaffenheit der Zahlen in einem Problem

- Faßbarkeit für den Schüler
- Sonstige Eindrücke, z.B. Abhängigkeit von der gesellschaftlichen Schicht
- Vorschläge für den Unterricht.

5.2 Berücksichtigung der empirischen Unterrichtsforschung

Es ist unmittelbar einsichtig, daß die Ergebnisse der Lehrerbefragung an verfügbaren Forschungsergebnissen kontrastiert und reflektiert werden müssen.
Die befragten Lehrer waren keine repräsentative Stichprobe, haben kaum alternative Möglichkeiten der Stoffgestaltung usw. Auch die gängige Praxis des Unterrichts beeinflußt die erhaltenen Daten; z.B. ist die geringe Menge von Aussagen zur Ähnlichkeitsgeometrie zum großen Teil ein Spiegel des tatsächlichen Stellenwerts im unterrichtlichen Alltag und in den Lehrplänen.

Aber auch die Forschungsergebnisse müssen an den Lehrerdaten geprüft werden, denn oft stammen diese Ergebnisse aus anderen schulischen und gesellschaftlichen Umgebungen als wir sie hierzulande vorfinden.

Es ist nun auffällig, daß es zu allen von den Lehrern genannten Aspekten umfangreiches Forschungsmaterial gibt; der Umfang des Materials zur Ähnlichkeitsgeometrie nimmt allerdings auch hier die letzte Stelle ein.

Global betrachtet ergaben die Gegenüberstellungen der Lehrerdaten und Forschungsdaten kaum Widersprüche. Aus der Gegenüberstellung ließen sich aber die vorhandenen Erfahrungswerte verbessern:

- "grob" beschriebene Verhaltensweisen von Schülern konnten differenzierter und detaillierter beschrieben werden;
- die gegenseitigen Verflechtungen und Zusammenhänge verschiedener Aspekte des Schülerverhaltens ließen sich deutlicher erkennen;

- durch Berichte über Unterrichtsversuche, die von der Alltagsnorm abweichen, ließ sich abschätzen, wieweit Schülerverhalten veränderbar ist oder nicht;
- durch Vorschläge von Forschern zur Unterrichtsgestaltung ließ sich der Umfang der praxisbezogenen Tips vermehren.

Die von den Lehrern verwendeten Merkmale zur Beschreibung von Schülerverhalten (Image/Strategien/Faßbarkeit/Sonstige Eindrücke) erwiesen sich auch für die Einordnung von Forschungsergebnissen als brauchbar.

5.3 Fazit

Durch die Verbindung von Lehrerdaten mit Forschungsdaten auf die oben beschriebene Weise, entstanden die nun folgenden Abschnitte 6 - 9.
Der Abschnitt 6 beschreibt die für Schüler wichtigen Aspekte der Proportion, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung für das Lernen von Mathematik.
Der Abschnitt 7 bringt eine detaillierte Darstellung jedes einzelnen Aspekts des Schülerverhaltens. Er stellt dabei einen "Oberblick über Erfahrungswerte" voran; im Anschluß folgt eine "Datentafel". In ihr sind in ganz kurzer Form Lehrer- und Forschungsdaten zusammengestellt; als einheitliches Raster dient hierbei die oben erwähnte Liste von Merkmalen (Image/Strategien/Faßbarkeit/Sonstige Eindrücke).
Der Abschnitt 8 faßt dann alle Analysen I und II zusammen.
Im Abschnitt 9 schließlich folgen Vorschläge zum Unterricht.

5.4 Literaturhinweise

Einen guten Einblick in die Arbeitsweise und Ergebnisse der empirischen Unterrichtsforschung geben HART [1981] und BAUERSFELD [1978]
Einen Gesamteindruck von der Unterrichtsforschung in USA und einigen anderen Ländern zum Thema "Proportion/Bruchrechnen" erhält man bei SUYDAM [1978] .

6 LERNVERHALTEN VON SCHOLERN IM BEREICH "PROPORTION" (Obersicht)

Die Fragestellung ist: was wissen wir zur Zeit über mathematische Verhaltensweisen bei Schülern, wenn Probleme aus diesem Bereich im Unterricht vorkommen?

Sobald man diese Fragestellung an empirischen Untersuchungen und - wie wir es gemacht haben - an Lehrerbefragungen verfolgt, beginnt das Beobachtungsfeld zu zerfallen. Es zeigen sich verschiedene, miteinander vielfältig verbundene Aspekte.

6.1 Netzwerk von Aspekten (Figur 1/Figur 2)

Figur 1 zeigt grafisch die Ergebnisse der Auswertung empirischer Forschungsarbeiten und von Lehrerbefragungen, soweit es um die globalen Aspekte des angesprochenen Gebiets geht. Diesen Auswertungsergebnissen ist die mathematische Systematik gegenübergestellt (Figur 2).

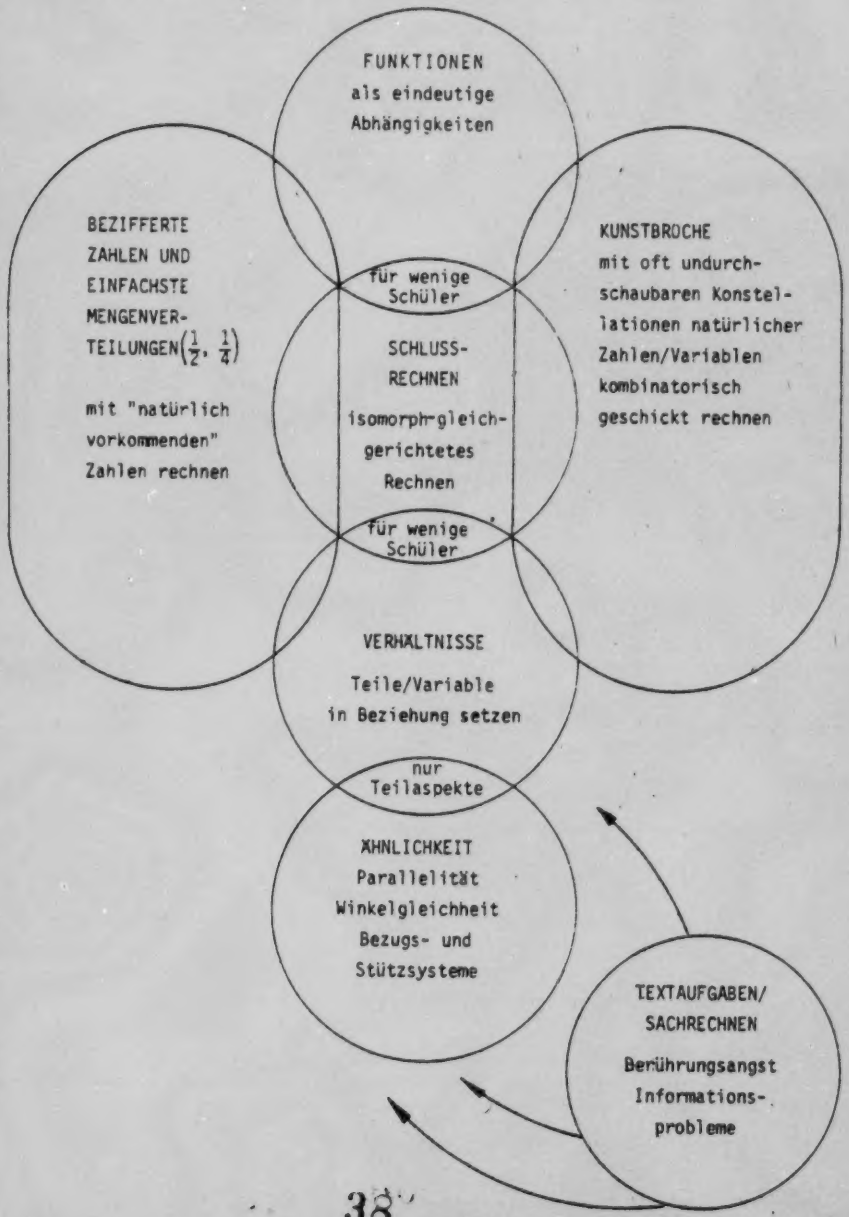
Jeder in Figur 1 durch eine Schleife dargestellte Bereich ist ein Aspekt, unter dem "proportionale Themen" für Schüler vorkommen. Die Benennung und Kommentierung dieser Aspekte in Figur 1 soll einen ersten Eindruck vermitteln, welche Gestalt und welche Bedeutung jeder Aspekt für Schüler hat. Die Hinweise in den Oberlappungsbereichen der Aspekte geben einen ersten Eindruck von dem gegenseitigen Zusammenhang.

o Der eigentliche Kernbereich "Proportion" löst sich in vier Aspekte auf, die sich nur wenig überlappen:

- VERHÄLTNISSE: Schüler haben ein intuitives Verständnis für das Verhältnis von 2 Größen oder 2 Zahlen; bis zu einem eigentlichen Verhältnisbegriff und weiter zu einer Vorstellung von Verhältnisgleichheit sind aber viele Stufen zu durchlaufen. Hauptmerkmal für die Schüler ist dabei, 2 bzw. 4 Zahlen/Variable miteinander in Beziehung bringen zu müssen.

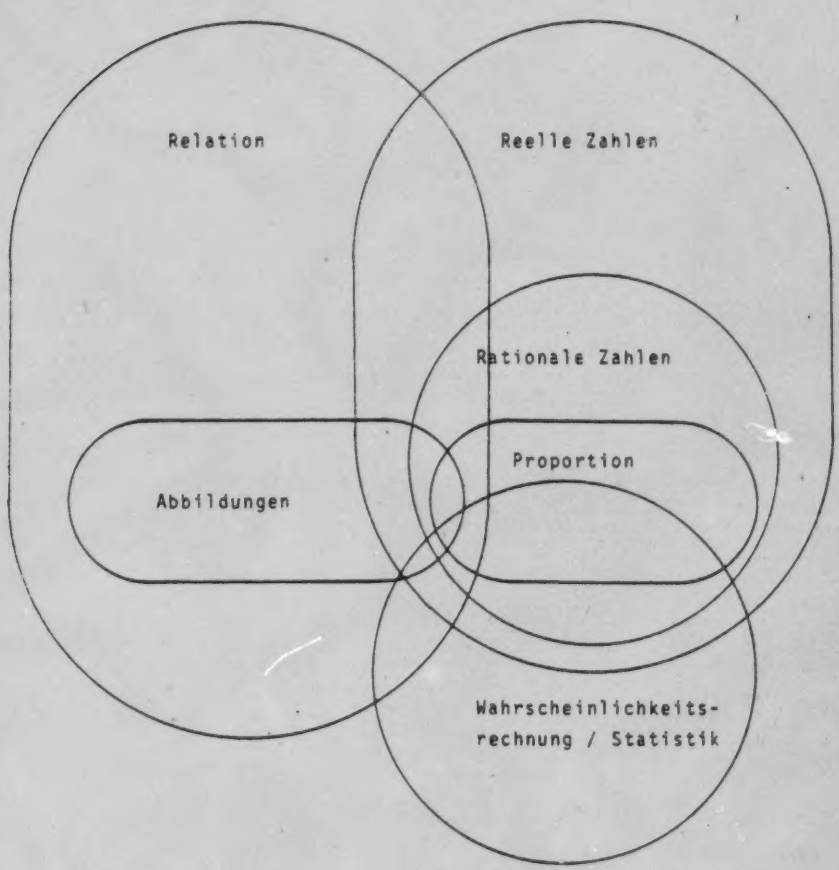
Figur 1

NETZWERK VON ASPEKTEN PROPORTIONALER THEMEN IN DER SICHT VON SCHOLERN



Figur 2

FACHSYSTEMATISCHE EINBETTUNG DES BEREICHS "P r o p o r t i o n"



- SCHLUSSRECHNEN: für Schüler steht hier zunächst nicht der Verhältnis- oder Proportionsbegriff im Vordergrund, sondern die Tatsache, daß sich Größen "gleichartig" verändern. Dies wird unterstützt durch die Beobachtung, daß "antiproportionale" Aufgaben trotz Erfolgen in der direkten Schlußrechnung von Schülern schlecht bearbeitet werden.

- FUNKTIONEN: für Schüler scheint hier eine ganz eigenständige Fragestellung vorzuliegen, die zunächst nichts mit direktem Schlußrechnen zu tun hat.
  Funktionen werden dabei nicht als spezielle Relationen aufgefaßt, sondern als eindeutige Abhängigkeiten verschiedener Größen.

- ÄHNLICHKEIT: hier ist der Verhältnisaspekt nur ein Teilaspekt; er steht auch keineswegs im Vordergrund. Vielmehr spielen die Vorstellungen der Parallelität und Winkelgleichheit die Hauptrolle, erst in dritter Linie die Proportion.
  Auch das Bestreben der Schüler, sich bei geometrischen Figuren Bezugs- und Stützsysteme zu schaffen, die eine geistige Wiederbeschaffung der Figur ermöglichen, unterstützt stärker die Rolle der geometrischen Aspekte an der Ähnlichkeit als die Rolle des numerischen Aspekts.

o Die genannten vier Aspekte werden von zwei "Hilfsbereichen" flankiert. Sie stellen eine Aufteilung der (positiven) rationalen Zahlen in einen Verbund (ℕ, 𝔻, 1/2, 1/4*) einerseits und die übrigen Brüche ("Kunstbrüche") andererseits dar. Der erstgenannte Verbund wirkt als häufigste Rechenhilfe und die Schüler tun alles - bis hin zur Veränderung der Aufgabenstellung - um in diesem Verbund verbleiben zu können.
  Eine weitverbreitete Berührungsangst besteht gegenüber den Kunstbrüchen, bei denen viele Schüler den Eindruck haben, mit undurchschaubaren Konstellationen mehrerer Variablen umzugehen.

o Allen Aspekten, vor allem aber den vier erstgenannten, ist noch der Aspekt "Textaufgaben" zugeordnet. In ihm ist auch zu einem großen Teil der Aspekt des Sachrechnens enthalten, soweit er in unserem Zusammenhang interessiert.

*) 𝔻 bezeichnet die Menge der Dezimalzahlen

Diese Beziehung ergibt sich vor allem aus der spezifischen Gestalt des Mathematikunterrichts im betrachteten Feld.
Es ist in diesem Zusammenhang wichtig, darauf hinzuweisen, daß sich keinerlei Anhaltspunkte dafür ergeben, Prozent- und Zinsrechnung aus der Sicht der Schüler als untergeordnete Aspekte der Bruchrechnung bzw. als deren Anwendung zu betrachten. Sie sind - wie auch das übrige Sachrechnen - vor allem der Verbindung der Aspekte Schlußrechnen/Textaufgaben zugeordnet, wobei das über die Verwendung der beiden numerischen Hilfsbereiche Gesagte unverändert auch hier gilt.
Im Bereich Textaufgaben/Sachrechnen tritt - ähnlich wie bei den Kunstbrüchen - eine auffällige Berührungsangst zutage.
"Das kann ich nicht" (und also mache ich es auch nicht) ist weitverbreitet. Ein zusätzliches Merkmal ist die reduzierte Informationsaufnahme; es werden lediglich bestimmte Reizinformationen (cues) dem Text bzw. der Problemstellung entnommen und damit - in oft höchst verfremdeter Weise - gearbeitet. Zusammen mit anderen Verhaltensweisen, etwa Vermeidung von Kunstbrüchen oder Proportionsgleichungen, entstehen oft unerklärliche Lösungsvorgänge und Ergebnisse.

- Figur 2 zeigt einen völlig anderen Aufbau als Figur 1. Hier ist die Proportion(alität) - wie in den vorangegangenen Abschnitten bereits gezeigt - in größere Zusammenhänge eingebettet.
Wenn man davon ausgeht, daß in der Schule versucht wird, in Orientierung an dieser in Figur 2 dargestellten Systematik zu unterrichten, so bleibt im Moment festzustellen, daß sich bei Schülern kein entsprechendes Lernzielfeld ergibt. Lehrziele und Lernziele klaffen hier grundsätzlich auseinander.

6.2 Verwerfung des Netzwerks

Das empirisch gefundene und in Figur 1 dargestellte Netzwerk gilt - ganz global gesprochen - mit den gezeigten Oberlappungsbereichen und -kommentaren für eine Mehrheit der Schüler bis etwa 13/14 Jahre.

Mit zunehmendem Alter (Hauptschule/Realschule: ab 14 - 16 Jahre; Gymnasium: ab 14 - 15 Jahre; Gesamtschule: ab 14 - 16 Jahre) beginnen sich Bereiche stärker zu überlappen und etwas zu verändern, allerdings in unterschiedlicher Weise:

- "Schlußrechnen" überlappt sich etwas stärker mit "Funktionen";
- "Verhältnisse" überlappen sich etwas stärker mit "Schlußrechnen";
- "Verhältnisse" erhalten stärker den Charakter der "Verhältnis-Gleichheit".

Allerdings ist den einschlägigen Daten klar zu entnehmen, daß hier keine "Durchbrüche auf breiter Front" stattfinden.
Weiter bleibt aus der Forschung und den Lehrerbefragungen jegliches Signal dafür aus, daß sich die Rolle der zwei numerischen Hilfsbereiche mit dem Alter der Schüler stärker verändert oder daß eine Verschmelzung dieser beiden Bereiche eintritt.

Der Bereich "Ähnlichkeit" hat so viele andere Aspekte, die zudem noch viel stärker im Vordergrund stehen als die "Proportionen", so daß seine Rolle im Verbund des gezeigten Netzwerks kaum Verschiebungen unterworfen ist.

Die Eigenarten des Bereichs "Textaufgaben" scheinen ebenfalls weitgehend invariant.

6.3 Fazit

Die hier - und im folgenden Abschnitt 7 - gemachten Aussagen sagen nicht, was Schüler "an sich maximal" leisten können. Sie beschreiben lediglich Verhaltensweisen und mathematische Einstellungen bei Schülern, die am derzeitigen Mathematikunterricht teilnehmen bzw. am Mathematikunterricht in dem hier ausgewerteten Zeitraum ab etwa 1950 (z.T. auch noch früher) teilgenommen haben.
Es ist auffällig, daß sich das aufgezeigte Netzwerk samt seinen Veränderungstendenzen in allen diesen ausgewerteten Untersuchungen und Befragungen, die über viele Länder streuen und einen langen Zeitraum

umfassen, übereinstimmend wiederfindet (- unbeschadet von Differenzen im Detail, die u.a. anschließend dargestellt werden).

Es gibt keine erkennbaren Einflüsse auf das Netzwerk durch die sogenannte "Reform des Mathematikunterrichts".
Es gibt allerdings konkrete Daten dafür, daß der Anteil der proportional denkenden Schüler in gymnasialen Schultypen deutlich höher liegt als in Realschule und Hauptschule.

Trotzdem bleibt festzuhalten, daß sich die Struktur mathematischer Verhaltensweisen bei der Mehrheit der Schüler durch das dargestellte Netzwerk beschreiben läßt und daß sich im Laufe der Jahre eine höhere Überlappung der Bereiche Verhältnisse/Schlußrechnen/Funktionen ergibt sowie eine Entwicklung der Verhältnisvorstellung in Richtung auf Verhältnisgleichheit. Rolle und Zweiteilung des Zahlenbereichs $\mathbb{Q}^+$, wie im Netzwerk dargestellt, bleibt grundsätzlich invariant.

In der Gegenüberstellung zur Fachsystematik in Figur 2 wird nun zum erstenmal ganz grob deutlich, von welcher Art und welchem Umfang der Graben zwischen erreichten Schülervorstellungen und der wissenschaftlichen Position ist. Der Graben besteht vor allem in Strukturunterschieden; und diese Strukturunterschiede ergeben sich bei offensichtlich wissenschaftsorientiertem Lernen.
Es bleibt demnach als erstes wichtiges Ergebnis festzuhalten, daß für eine Mehrheit der Schüler die fachsystematische Ordnung des Lehrplans keine solche Ordnung im Gelernten produziert.
Gleichzeitig bleibt festzuhalten, daß global gesehen aber kein Chaos, sondern eine Ordnung im Gelernten entsteht und sich beschreiben läßt - zumindest für eine große Schülergruppe.

Bevor wir Schlußfolgerungen aus Existenz und Gestalt dieses Grabens ziehen können, müssen wir uns den im Netzwerk global erkannten Bereichen und ihren Querverbindungen detaillierter widmen.

7 LERNVERHALTEN VON SCHOLERN IM BEREICH "PROPORTION" (Einzeldarstellungen)

Im folgenden werden die in Figur 1 genannten Bereiche anhand von Erfahrungswerten detailliert beschrieben. Die beiden in Figur 1 auftauchenden flankierenden Hilfsbereiche werden unter dem Titel "Brüche" (7.5) dargestellt.

7.1 Der Aspekt "Verhältnisse"

Oberblick über Erfahrungswerte

Alle Probleme, bei denen Proportionsvorstellungen eine Rolle spielen, sind durch ein breites Spektrum an Verhaltensweisen gekennzeichnet:

- das "interne" Verhältnis, also die Beziehung von 2 Zahlen/2 Größen zueinander, wird i.A. direkt und intuitiv erfaßt, ohne es aber immer zu einer Zahl oder einem Bruch weiterzuverarbeiten;
- dies hängt mit der Art zusammen, wie Schüler mit "externen" Verhältnissen umgehen, also mit dem Vergleich von Verhältnissen. Hierbei kommen die verschiedensten Umgangsformen vor, je nachdem wieviele Variable beachtet werden und ob diese paarweise "zu einer Zahl" verschmelzen oder nicht.

Ober die Verhaltensweisen kann man nur ganz global sagen, daß sich mit wachsendem Alter der Anteil der Schüler erhöht, die "Sicherheit im Vergleich von 2 Variablen" gewinnen. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Schülern bleiben beträchtlich.

Das Wahrnehmungsfeld und die Wahrnehmungsfähigkeit eines Schülers bestimmt in hohem Maße, welche Stufen er im Bereich "proportionalen Denkens" erreicht. Je breiter das Feld und je flexibler die Fähigkeit der Wahrnehmung, umso mehr wird eine Proportion überblickt.

Wie und wodurch aber Variablenpaare zur Vorstellung von einer Zahl verschmelzen, ist z.Zt. praktisch unbekannt. Das sichere Umgehen mit Proportionen ist damit jedoch nicht direkt gekoppelt.

Auffällig ist die starke Bindung des proportionalen Denkens an konkrete Sachverhalte, das Bruchvermeidungsverhalten und das Anwenden von Additionsstrategien (z.B.: 2 : 3 = (2 + 5) : (3 + 5)).

Zwischen Brüchen und Verhältnissen gibt es wenig Beziehungen, auch Transfers auf sonstige andere Bereiche sind wenig sichtbar. Sogar die verschiedenen Aspekte der Proportion selbst bleiben relativ unverbunden.

Das proportionale Denken eines Schülers korreliert hoch mit der Lehrereinschätzung des Schülers in Mathematik.
Image und Ziele des Gymnasiums führen zu einer Schülerselektion, die ganz offensichtlich proportional denkende Schüler bevorzugt.

Proportionales Denken ist demnach ein bedeutsames Element des derzeitigen Mathematikunterrichts; es erscheint umso bedeutsamer, je stärker sich der Unterricht an der wissenschaftlichen Fachsystematik orientiert. Das Vorhandensein solchen Denkens beim Schüler wird belohnt; das Entstehen solchen Denkens wird aber im derzeitigen Mathematikunterricht offensichtlich nicht signifikant gefördert. Ansonsten würden weder die geschilderten selektiven Wirkungen entstehen noch - bis in die letzten Jahrgänge der Sekundarstufe I - so hohe Divergenzen im proportionalen Denken der Schüler vorhanden sein.
Es ist allerdings ziemlich sicher, daß auch Persönlichkeitsstrukturen wie IQ, Wahrnehmungsfähigkeit etc. eine Rolle spielen.
Wie wir aber aus einigen Fallstudien wissen, ist es möglich, durch früh beginnende und laufend fortgeführte Pflege das proportionale Denken beim Schüler deutlich zu fördern.

Literaturhinweis: FLOER [1977]

Datentafel: Verhältnisse

Auflistung empirischer Daten zum Schülerverhalten im Lehr-Lern-Prozeß; die ausführliche Beschreibung der zugrundeliegenden Quellen findet sich in der Quellensammlung des DIDAKTISCHEN INFORMATIONSDIENSTES MATHEMATIK.

Image des Themas bei den Schülern	- Antipathie, Undurchschaubarkeit - Ablehnung von Verhältnisgleichungen - Gefühl, kaum Lernfortschritte zu machen - Verhältnisrechnen gilt als neue Rechenart, bei der man Zusammenhänge finden muß - natürliche Zahlen gelten nicht als Verhältnisse - Verhältnisse haben verschiedene Erscheinungsformen, die je nach Probleminhalt in den Blick treten und je eigene Verhaltensweisen aufrufen: Teil: Teil, Teil: Ganzes, Teil von einem Ganzen, Verhältnisgleichheit - Proportionen werden vornehmlich als Größenverhältnisse zweier verschiedener Objekte gesehen, wobei die Größen selbst aus dem gleichen Größenbereich stammen. Verhältnisse von Größen aus verschiedenen Größenbereichen sind für Schüler etwas Unnatürliches.
Strategien der Schüler	
algorithmischer Aspekt	- formelhaft, Trend zum Schema - Verhältnisaufgaben werden häufig in Dreisatzaufgaben umgeformt und/oder durch einfaches additives Vergrößern bzw. Verkleinern zu lösen versucht. Dementsprechend wird entweder versucht, über die "Einheit" zu genen oder direkt eine Lösung über "gleiche Zunahmen/gleiche Abnahmen" (2 : 3 = 5 : ?. Zunahme "3"!) zu finden. Auch viele chaotische Formen, z.B. in der %-Rechnung, kommen vor. - Beim Arbeiten mit "Grundgleichungen in Verhältnisform" (z.B. in der %-Rechnung) tritt rein formales Umgehen ohne Rückbindung an die Erfahrung auf, ebenso falsche Identifikation der Variablen in den Grundgleichungen.

- Beim Abschätzen von Größenverhältnissen und Chancen/Wahrscheinlichkeiten treten Nebenfaktoren auf, die die Beurteilung stark beeinflussen (Gesamtgröße, Beachten der Häufigkeit der zu ziehenden Farbe); bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen in Urnenversuchen tritt aufgrund des Versuchscharakters der Differenzvergleich und die Beachtung nur einer Variablen verstärkt auf, auch wenn die Schüler gut proportional denken können.
- Ein Teil:Teil-Verhältnis wird nicht in bezug auf die Gesamtheit gesehen, innerhalb derer es gebildet wurde (z.B. wird 3 : 5 nicht als eine Aufteilung von 8 angesehen).
- Es treten vor allem drei Formen des Vergleichs von Verhältnissen bei Schülern auf:

  I: intuitiver Vergleich, ohne Reflexion und Begründung;

  II: Vergleich unter Beachtung einer Variablen ($2 : 3 < 3 : 4$, weil $2 < 3$);

  III. Abschätzen jedes Verhältnisses "intern" für sich, dann Vergleich der beiden Verhältnisse "extern"; dabei geschieht dies oft durch Rückführen beider Verhältnisse auf die Einheit (Stammbrüche) oder auch durch Anteilvergleich.

numerischer Aspekt

- vom numerischen Zustand der Verhältnisse hängt es sehr stark ab, ob die Schüler proportionale Methoden verwenden oder nicht und wie leicht sie mit den Verhältnissen umgehen.
- Verhältnisvergleich: Übereinstimmung in einer Variablen erleichtert den Vergleich sehr, Teilbarkeit ebenfalls, außerdem erkennbare Vielfach-Beziehungen. Brüche, nicht aufgehende Verhältnisse, Deutung natürlicher Zahlen als Verhältnisse sind schwer.
- Müssen nicht-aufgehende Verhältnisse beurteilt, verglichen oder umgerechnet werden, so wird zuerst versucht, sie "intern" zu betrachten ("2 : 5 ist praktisch wie 1 : 2") und/oder durch additive bzw. subtraktive Verfahren umzuformen. Brüche werden so weit wie eben möglich vermieden.

- bei aufgehenden Verhältnissen (4 : 2) werden oft korrekte Strategien angewendet (4 : 2 = 2 : 1).
- sind Verhältnisse erkennbar gleich, so werden sie als Verhältnisse verglichen; sind sie nicht erkennbar gleich, so wird versucht, durch Schätzen oder additive Verfahren umzuformen und zu vergleichen.

informationsverarbeitender Aspekt

- Verhältnisse haben für Schüler im jeweiligen Kontext sehr verschiedene Informationsinhalte (Größenvergleich, Chance, Teil, ...)
- Die an Verhältnissen beteiligten Variablen werden in unterschiedlichen Weisen miteinander verbunden: Differenz, direkter qualitativer Vergleich, direkter quantitativer Vergleich, Umrechnen (auf Ganzes, auf die Einheit ...)
- Die Anzahl der an Verhältnissen wahrgenommenen Variablen ist sehr unterschiedlich. Aber die Wahrnehmung mehrerer Variablen ist nicht automatisch mit der Bildung eines Verhältnis- oder gar Proportionsbegriffs verknüpft (z.B. überblickt die Argumentation "hier sind 3mal so viele weiße Kugeln wie schwarze, dort nur 2mal so viele" in einem 2-Urnen-Versuch alle Variablen ohne paarweise zu Verhältnissen zusammenzufassen)
- Verhältnisaufgaben kommen oft im Zusammenhang mit Texten vor, die selbst Reizworte enthalten, welche die Rechenstrategien im Umgang mit den Verhältnissen wieder beeinflussen (z.B. "Preis um 1/3 reduzieren" = "1/3 abziehen")
- Schüler, die die Strategieformen I, II, III (s.o.) im Umgang mit Verhältnissen beherrschen, sind bei Textproblemen gegen mathematisch unwesentliche Nebeninformationen weit weniger anfällig als solche, die nur I oder II beherrschen.
- Der Umgang mit Verhältnissen mittels Gleichungsumformungen vermittelt dem Schüler keine neuen Einsichten über Verhältnisse und gibt keine langdauernden Lernerfolge beim Verhältnisrechnen.
- Proportional denkende Schüler (i.S. von "Denken in Verhältnis-Gleichheiten") haben i.A. auch eine hohe Fähigkeit, umfangreiche Informationen zu verarbeiten und können sich Sachverhalte gut gliedern und wieder in Erinnerung rufen.

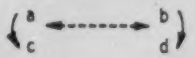
Faßbarkeit	
allgemein	- hängt stark vom numerischen Charakter der Variablen ab (s.o.) - nur mathematisch begabte Schüler erfassen Verhältnisse und Proportionen unabhängig vom numerischen Charakter gut, alle anderen haben (unterschiedlich) große Schwierigkeiten und keinen langfristigen Lernerfolg. Eine große Mehrheit der Schüler bildet überhaupt keinen Verhältnisbegriff, bleibt z.B. bei "2 von 5" oder "2 zu 5" stehen. Diese Gruppe leistet i.A. das intuitiv-qualitative Abschätzen von "Größen-Verteilungen" und evtl. Wahrscheinlichkeiten, allerdings nur in numerisch einfachen Fällen. Beim Umgehen mit Proportionen weicht sie auf Dreisatz-Methoden aus. - Beim Vergleich von Verhältnissen gilt global folgende (aufsteigende) Schwierigkeitsskala: (a/c) vs. (a/d) leichter als (a/a) vs. (b/b) leichter als (a/b) vs. (ka/kb) leichter als (a/b) vs. (ka/d) leichter als (a/b) vs. (c/d).
altersbezogen	- Eine kleine Gruppe begabter Schüler verfügt ab Kl. 4/5 über Proportionsvorstellungen. - Bei den meisten jüngeren Schülern gibt es nur geringe Fähigkeiten im proportionalen Denken; die verschiedenen Aspekte der Proportion (s.o.) sind noch unverbunden; die Vorstellung von Größenverhältnissen bleibt bis ca. 15 Jahre eng mit konkreten (meist physikalischen) Vorstellungen verbunden. - Mit zunehmendem Alter werden mehr Variable wahrgenommen, aber nicht unbedingt ein Verhältnisbegriff gebildet. - Die individuellen Unterschiede sind auf jeder Altersstufe sehr groß. - Global nimmt mit dem Alter das Verständnis für Verhältnisse und Proportionen zu. Sicherheit im Umformen und Vergleichen beliebiger Verhältnisse erreichen gegen Ende der Sekundarstufe I aber keinesfalls mehr als 3o % der Schüler; in numerisch einfacheren Fällen ist der Leistungszuwachs von 12jährigen Schülern zu 16jährigen Schülern deutlich zu sehen.

Sonstige Eindrücke	- jüngere Schüler stehen dem Gebiet unvoreingenommen gegenüber, später wird es negativer gesehen - Anwendungsbezug motiviert nicht dauerhaft - Zufallsexperimente fördern die Sicherheit im Erfassen und Vergleichen von Verhältnissen - Das Lehrerurteil über den Grad der mathematischen Begabung eines Schüler deckt sich ziemlich genau mit dem Grad seines Proportions-Verständnisses - Es gibt schulartspezifische Unterschiede: Gymnasium: proportionales Denken bei Jungen und Mädchen signifikant vorhanden Realschule: proportionales Denken nur bei Jungen signifikant vorhanden Hauptschule: proportionales Denken bei Jungen und Mädchen wenig signifikant vorhanden - Die Neigung zu additiven Strategien (s.o.) ist bei Mädchen deutlicher erkennbar als bei Jungen.

7.2 Der Aspekt "Schlußrechnen"

Oberblick über Erfahrungswerte

Die "isomorphe" Rechenweise



beherrscht (bis etwa Kl. 8/9) das Vorgehen und die Vorstellung. Schlußrechnen ist offensichtlich ein Rechnen in vertrauten, sich gleich verhaltenden Zusammenhängen. Selbst "vertikal" numerisch unbequeme Konstellationen bringen viele Schüler nicht davon weg, isomorph zu rechnen.

Das funktionale Abarbeiten im Muster

kommt mehr bei älteren Schülern vor (Kl. 9/10) und hat außerdem einen signifikanten Zusammenhang mit dem Vorhandensein einer Proportionsvorstellung (i.S. von "Verhältnis-Gleichheit").
Bei jüngeren Schülern kommt hinzu, daß sie mit dem ganzen Bereich funktionaler Vorstellungen, Verfahren und Begriffe noch gar nicht richtig vertraut sind.

Die Erfolgsquoten beim Schlußrechnen (ohne Taschenrechner) hängen stark davon ab, wie weit der Bereich der natürlichen Zahlen und der Teilbarkeit verlassen wird. Auch die Strategien der Schüler orientieren sich danach, so daß keineswegs der Schluß über 1 bevorzugt wird. Gemeinsame Teiler oder kombinatorisches Schließen ("4 nach 6 = 4 nach 2, dann 6 = 4 + 2") spielen eine große Rolle.

Schlußrechnen ist oft eine "Proportions-Umgehungs-Strategie".
Die Variablen einer Proportion werden hier in ein isomorphes Variablenfeld aufgelöst, geschickt angeordnet und (häufig schematisch) abgehandelt.

Schlußrechnen ist nach dem Grundverständnis der Schüler "gleichgerichtet" und "linear". Die Struktur der zu verarbeitenden Variablen

wird i.A. diesem Grundverständnis angepaßt. "Antiproportionalität" oder z.B. die Vorstellung einer "Rabattfunktion" passen nicht dazu. (s. hierzu auch 7.3)

Alle Schemata und Methoden, die sich nicht an dem Isomorphie-Bild orientieren, haben keine lange Behaltensdauer.

Literaturhinweis: SUAREZ [1977] , VERGNAUD [1980]

Datentafel: Schlußrechnen

Auflistung empirischer Daten zum Schülerverhalten im Lehr-Lern-Prozeß; die ausführliche Beschreibung der zugrundeliegenden Quellen findet sich in der Quellensammlung des DIDAKTISCHEN INFORMATIONSDIENSTES MATHEMATIK.

Image des Themas bei den Schülern	- Wirkt bei bekannten Größen und in überschaubarem Rahmen vertraut; der große Schreib- und Rechenaufwand bei ausführlicher Darstellung und "krummen" Zahlen hat aber abschreckende Wirkung. - "Dreisatz" ist ein Reizwort bis zum Abitur - Die Methoden der "Eltern" gelten als einfacher gegenüber denen der neueren Didaktik (Zuordnungen, Paare) - Ist ein eigenes Thema, ohne enge Verbindung mit den anderen hier besprochenen Bereichen.
Strategien der Schüler	
algorithmischer Aspekt	- Bei 11- bis 15jährigen Schülern überwiegt die isomorphe Strategie; die funktionale Strategie erreicht höchstens 15 % Anteil; andere Strategien kommen kaum vor (s.u.); einige Schüler orientieren sich an Mittelwerten (z.B.: 3 kg kosten 6 DM, also werden 6 kg 12 DM kosten und damit dürfte der Preis für 5 kg ziemlich in der Mitte zwischen 5 DM und 12 DM liegen). - Funktionale Strategien werden kaum aufgegriffen; auch für grafische Algorithmen liegt noch kein Ausdrucks- und Erfahrungsbereich vor (Kl. 7) - Hoher Anteil intuitiver und selbstgestrickter Algorithmen im Rahmen der isomorphen Strategie (Rechnen in einem Zuge, Schluß über ggT statt über 1); sobald der einfache und überschaubare Rahmen verlassen wird, werden die Strategien rezepthaft, unsicher und chaotisch.
numerischer Aspekt	- Bei einfacheren Zahlenwerten sind die Ergebnisse intuitiv klar, in allen anderen Fällen ziemlich große Probleme.

- Unterscheidet man die folgenden Dreisatz-Typen

S_1: $u_1 \mid u_2$; $k \cdot u_1 \mid ?$ $\qquad$ S_2: $u_1 \mid k \cdot u_1$; $u_2 \mid ?$

S_3: $k \cdot u_1 \mid u_2$; $u_1 \mid ?$ $\qquad$ S_4: $k \cdot u_1 \mid u_1$; $u_2 \mid ?$

so sind S_1 und S_2 am leichtesten, S_4 ist schwer.
S_3 und S_4 sind besonders fehleranfällig.
Wenn der "horizontale" Variablenzusammenhang numerisch ins Auge fällt, nimmt die funktionale Strategie (z.B. bei S_4) leicht zu.

informationsverarbeitender Aspekt

- Die Schlußrechnungsaufgabe wird als Suchaufgabe im Rahmen eines vertrauten Zusammenhangs zwischen (vertrauten) Größen aufgefaßt.
Der Zusammenhang wird dabei grundsätzlich als linear-gleichmäßig verstanden.
- Schemata in der Anordnung der Größen dienen als Darstellungshilfen bei der Bewältigung neuer Probleme (auch wenn das Problem mit Dreisatz nichts zu tun hat)
- Viele proportionale Probleme werden bis Ende der Sekundastufe I als Dreisatzaufgabe abgehandelt; Verhältnisse werden nur bei einfachen numerischen Beziehungen ("wenn es aufgeht") gebildet; Brüche werden gemieden.
Beispiel: "1 cm^3 wiegt 27 g" ist wesentlich leichter verstehbar als "$\gamma = 27\ g/cm^3$".
- Der Einbezug von Größen bringt neue Schwierigkeiten:
die Schüler wollen in einem Größenbereich verbleiben;
sie verwechseln die Größen und die Umgangsregeln mit ihnen (z.B. Volumen vs. Umfang)

Faßbarkeit allgemein

- Global ist die "isomorphe" Methode gut verstehbar.
Die individuellen Unterschiede zwischen den Schülern bleiben aber groß, vor allem bei Dreisätzen mit "krummen" Zahlen und bei erweiterten Dreisätzen. Kochrezepte halten höchstens 4 - 6 Wochen.

	- Funktionale Methoden schwierig; funktional arbeitender Schüler wenden häufig Proportionen an (entweder als Verhältnisbeziehungen oder als proportionales Differenzenbilden) - Bei folgenden Typen von Schlußrechnungsaufgaben Typ 1: Schluß auf das Doppelte/die Hälfte Typ 2: Halbieren und Vervielfachen Typ 3: Schluß über einen gemeinsamen Teiler Typ 4: allgemeiner Schluß ergaben sich bei Messungen in Kl. 8 folgende Schwierigkeitsgrade (Anteil der richtigen Lösungen): Typ 1: ca. 85 %, Typ 2: ca. 45 %, Typ 3: ca. 3o %, Typ 4: ca 17 % 9 % der Schüler beherrschen Aufgaben aller 4 Typen; 12 % beherrschen Aufgaben der Typen 1, 2, 3 (ohne 4); 23 % der Schüler konnten nur Aufgaben der Typen 1 und 2 lösen; 49 % beherrschten lediglich Aufgaben des Typs 1 sicher.
altersbezogen	- Die Erfolgsquote nimmt gegen Ende der Sekundarstufe I deutlich zu, allerdings muß das Thema wieder eigens aufgegriffen werden. - 14jährige überschauen bereits deutlich mehr Angaben gleichzeitig als 12jährige. - Ab Kl. 8 wird der "Ansatz" leichter, der Schluß über 1 bleibt aber für viele schwer (mittlerer und unterer Leistungsbereich); in den oberen Leistungsbereichen entwickelt sich ab Kl. 8 ein guter Oberblick über die Dreisatzanwendung. - Bei 16- bis 17jährigen Schülern ist die funktionale Strategie verbreiteter als bei jüngeren Schülern, vor allem bei naturwissenschaftlichen Aufgabenstellungen.
Sonstige Eindrücke	- Große Diskrepanz zwischen Schulmethoden einerseits und "Elternmethoden" bzw. Erwartungen der Industrie und Berufswelt andererseits.

7.3 Der Aspekt "Funktionen"

Überblick über Erfahrungswerte

Das Funktionskonzept ist für Schüler nicht direkt mit dem Proportionskonzept verbunden, am wenigsten für jüngere Schüler.
Das Feld ist außerdem sehr vielfältig:

Bei der Proportion(alität) ist der "Zusammenhang" von Größen und die "gleichartige Veränderung" von Größen beherrschend, bei der Antiproportionalität herrscht Verwirrung und (bestenfalls) die Vorstellung einer "gleichartig umgekehrten Veränderung" vor.

Bei der Behandlung von Funktionen setzt sich vor allem die Vorstellung einer "1 - 1 - Zuordnung" fest.

Der Graph von Funktionen gewinnt sofort eine "Optik", d.h. ein grafisches Eigenleben, er wird zum geometrischen Muster, das man deutet, ergänzt, verbessert, schönt. Er wird vom "Diagramm" mit sachlogischem Inhalt zum "Bild" mit ästhetischen Aspekten.

Der Zusammenhang zwischen Graph und Gleichung ist ziemlich schwierig. Auch der Bereich der damit zusammenhängenden Schreibweisen ist überdurchschnittlich schwierig.

Vom relationentheoretischen Oberbau der Funktionenlehre bleiben den Schülern i.A. keine richtigen Eindrücke.

Verläßt man den Bereich linearer Zusammenhänge, so steigen die Schwierigkeiten ungemein an.

Das Funktionskonzept selbst zeigt beim Schüler eine große Vielfalt von Aspekten, die unterschiedlich schwierig sind. Es scheint ein ganz eigener Vorstellungsbereich zu sein, der auch viel weniger mit Persönlichkeits- und Intelligenzstrukturen verknüpft ist als die Proportionalität.

Literaturhinweis: SUAREZ [1977], HAUSSLER [1977]

Datentafel: Funktionen

Auflistung empirischer Daten zum Schülerverhalten im Lehr-Lern-Prozeß; die Daten wurden vor allem im Hinblick auf die Bereiche Proportionalität/ Antiproportionalität gesammelt, jedoch durch allgemeine Daten ergänzt. Die ausführliche Beschreibung der zugrunde liegenden Quellen findet sich in der Quellensammlung des DIDAKTISCHEN INFORMATIONSDIENSTES MATHEMATIK

Image des Themas bei den Schülern	- Der Gesamtbereich Funktion erscheint dem Schüler als lose Verbindung vieler, verschiedenartiger Begriffe; vieles wird unverstanden auswendig gelernt. Zuordnungen werden meist als 1 - 1 - Zuordnungen verstanden, nicht als Relationen; bei den Relationstypen herrscht große Konfusion. - Eine Grundvorstellung bei Funktionen ist es, daß hier Größen zusammenhängen und sich gleichartig verändern. Dabei steht die lineare Veränderung im Vordergrund (Proportionalität); reziproke (antiproportionale) Veränderungen sind dagegen etwas völlig Verschiedenes, erscheinen unnatürlich, angsteinflößend. Quadratische Veränderungen und Zusammenhänge sind weniger neuartig.
Strategien der Schüler algorithmischer Aspekt	- Bei Funktionen wird allgemein der Wertebereich stärker beachtet als der Definitionsbereich; grafisch-optische Strategien im Achsenkreuz, abgelöst vom Funktionskonzept, spielen eine große Rolle (z.B. Graphen ergänzen und dann ablesen). - Suchen und Beschreiben von Funktionsvorschriften: -- es treten allgemein viele individuelle, spontane und vom Lehrer nicht erwartete Strategien auf; -- bei Proportionalitäten wird oft verwendet: "ist q-mal enthalten in"; diese Strategie ist auf andere Funktionen nicht übertragbar; -- bei Antiproportionalitäten werden eher Dreisatzmuster versucht als funktionale Konzepte; es werden "entsprechend umgekehrte Verhältnisse" gesucht, gelegentlich auch Differenzenvergleiche angestellt. Die Verwendung des Dreisatzmusters führt zu verwirrten Strategien.

Die Strategie des "je größer - desto kleiner" (= "entsprechend umgekehrt") wird auch auf nicht-reziproke Funktionen mit fallendem Charakter angewendet.

-- bei quadratischen Veränderungen treten Lösungsversuche mit (direkter) Proportionalität und Differenzenvergleichen bzw. Differenzenzuwächsen auf; es gibt keine Zusammenhänge mit den Strategien der indirekten Proportionalität (Antiproportionalität).
Viele Schüler setzen mit einer aus der Proportionalität kommenden Strategie an, z.B. bei $x \rightarrow x^2$ mit "dem Doppelten entspricht das 4-fache"; diese Strategie kann aber i.A. nicht verallgemeinert werden zu "dem a-fachen entspricht das a^2-fache", da sie einer linearen Vorstellung entspringt.

numerischer Grafischer Aspekt

- Pfeildiagramme:
werden grundsätzlich als "endliche-diskrete" Zuordnung verstanden; Obergang ins Achsenkreuz schwer. Das Umkehren einer Zuordnung im Pfeildiagramm fällt leicht.
- Graphen im Achsenkreuz:
-- Die Achsen im Achsenkreuz werden von Schülern verschieden gelesen: eine große Gruppe von Schülern faßt die gegebenen Größen als Punkte auf den Achsen auf; eine andere Gruppe identifiziert die gegebenen Größen mit Längensegmenten auf den Achsen, wobei die Längensegmente nicht immer von der 0 ausgehen müssen.
-- Die Funktionsgraphen stellen "Diagramme" dar, also flächenhaft ausgebreitete Sachlogik; von Schülern werden sie aber oft als Bilder im Sinne ästhetischer Grafik aufgefaßt. Bei Graphen steht für Schüler daher oft die Suche nach geometrischen Mustern, z.B. durch das Ziehen von Verbindungslinien, im Vordergrund. Das Ausfindigmachen von sachlogischen Komponenten wie Wertebereich und Definitionsbereich am Graphen erscheint dem Schüler oft unmöglich. Dazu kommt, daß dem Schüler für eine sachlogische Graphenbeschreibung noch der Ausdrucks- und Erfahrungsbereich fehlt.

	- Angaben zu den verschiedenen Darstellungen und Aktivitäten bei einer Funktion: -- Wertetabellen und Rechnungen werden gegenüber der Graphenablesung oft bevorzugt; -- Funktionsgleichungen werden häufig rein mechanisch gehandhabt; grafische Deutungen (Steigung, Achsenabschnitt, Parameter) sind sehr schwer. -- das Eintragen von Punkten und das Deuten (statistischer) Blockdiagramme fällt leicht; das funktionale Deuten von Punktlagen und Kurvenverlauf ist ziemlich schwer; die Angabe von Gleichungen zu Graphen fällt sehr schwer. - Antiproportionalität: Graphen und Tabellen werden gut gehandhabt, die Funktionsgleichung nicht (Kl. 7/8).
informationsverarbeitender Aspekt	- Wenn Funktionen als spezielle Relationen eingeführt werden, so fassen die Schüler anschließend die Funktionen entweder als Relationen auf (und umgekehrt) oder sie meinen, daß Funktionen keine Relationen seien. - Zuordnungsvorschriften können kaum verbalisiert werden. - Die Schreibweise x $\longrightarrow$ y wird falsch verarbeitet, nämlich als: "dem x wird ein y zugeordnet". - Bei Funktionen steht die "isomorphe" Gleichveränderung von Größen oft im Hintergrund. Sobald Zusammenhänge nicht proportional sind, werden die Informationen sehr unkritisch verarbeitet, weil kein "Schema" mehr zur Verfügung steht. - Das Verständnis der Antiproportionalität ist sehr komplex und setzt viele mathematische Erkenntnisse voraus; möglicherweise von IQ abhängig. - vgl. auch die obigen Bemerkungen zu "Diagramm" und "Bild".
Faßbarkeit allgemein	- Das Funktionskonzept ist weniger an die Intelligenzstruktur gebunden als das Proportionalitätskonzept. Die Leistungen in der schulischen Funktionslehre sind auch vom Verständnis des Relationskonzepts weitgehend unabhängig.

- Die Relationstypen sind für eine Mehrheit von Schülern schwer faßbar, doch ist die Unterscheidung Funktion/keine Funktion nicht schwer.
- Führt man Zuordnungen anhand von Verwandtschaftsbeziehungen ein, so ist der Obergang zu mathematischen Beziehungen schwer; auch der Obergang von der Zuordnungsvorstellung im Pfeildiagramm zur Paardarstellung und Darstellung im Achsenkreuz ist schwer. Pfeildiagramme selbst sind leicht verständlich, auch das "Umkehren" an Pfeildiagrammen.
- Der Sprachgebrauch "Bild" und "Vor-Bild" ist gut verständlich; dagegen sind die im Bereich der Funktionenlehre üblichen Schreibweisen wie f, f(x), $x \longrightarrow f(x)$, $y = f(x)$ sehr schwer verständlich.
- Es gibt erhebliche Verständnisunterschiede zwischen Funktionen mit endlichen/diskreten und unendlichen/kontinuierlichen Definitions- und Wertebereichen.
- Bei Messungen in Kl. 8/9 ergaben sich folgende Werte:
  -- Punkte ins Achsenkreuz eintragen, Diagramme lesen; Schwierigkeitsgrad ca. 9o%
  -- Punktlagen und Kurvenverlauf deuten; Schwierigkeitsgrad 65 %
  -- lineare Graphen durch Gleichungen beschreiben; Schwierigkeitsgrad ca. 2o %.
- Erfassen von (funktionalen) Veränderungen, z.B. anhand vorgegebener Wertetafeln:
  lineare Veränderungen werden gut erfaßt, quadratische Veränderungen nur schwer (eine Messung ergab bei 16jährigen Schülern ca. 5o %); antiproportionale Veränderungen sind ungewohnt und werden meist nur qualitativ (als "Gegenbewegung") erfaßt.

altersbezogen

- Das Verständnis für das (allgemeine) Funktionskonzept nimmt erst nach Klasse 8 signifikant zu.
- Bei proportionalen Fragestellungen steht am Anfang die gleichgerichtete Veränderung der Größen, oft noch additiv verstanden; sie entwickelt sich dann zu einer multiplikativen, streng

	linearen Veränderung. Die Vorstellung einer Abhängigkeit der Größen aus dem einen Bereich von den Größen aus dem anderen Bereich entwickelt sich viel uneinheitlicher und seltener; so entsteht auch bei älteren Schülern gegen Ende der Sekundarstufe I nicht grundsätzlich ein funktionales Proportionskonzept. - Bei antiproportionalen Fragestellungen wird eine deutliche Leistungsverbesserung mit zunehmendem Alter beobachtet; auch die Verwechslung mit proportionalen Aufgaben nimmt mit dem Alter ab.
Sonstige Eindrücke	- Eine funktionale Deutung von Proportions- und Antiproportionsproblemen ist nur stark lehrerzentriert erreichbar. - Im Bereich des Funktionskonzepts gibt es wenig Unterschiede zwischen Jungen und Mädchen. - Im Umgang mit den Darstellungsformen für Funktionen scheint die soziale Einordnung des Schülers bedeutsam: Schüler mit geringem sozialen Standard und geringer mathematischer Leistung bevorzugen Wertetafeln; Schüler mit hohem sozialen Standard und hoher mathematischer Leistungsfähigkeit bevorzugen Graphen.

7.4 Der Aspekt "Ähnlichkeit"

Überblick über Erfahrungswerte

Sachverhalte und Verfahren der elementaren ebenen Geometrie stellen für Schüler i.A. keine gravierenden Probleme dar; dies trifft vor allem auf nicht zahlengebundene und nicht-algebraische Teile der Geometrie zu (die logisch-beweistechnischen Aspekte bleiben in unserer Betrachtung ganz außer acht).

Das Phänomen der Ähnlichkeit hat für die Schüler eine figurale und eine numerisch-algebraische Seite.
Im Vordergrund steht die figurale Ähnlichkeit, die über Parallelität und/oder Winkelvergleiche erfaßt wird, nicht über den Alltagssprachgebrauch von "ähnlich". Der mathematische Ähnlichkeitsbegriff ist ein nicht-intuitiver Kunstbegriff, der vom Schüler fast ausschließlich über den Unterricht erworben wird.
Längenproportionen spielen erst anschließend eine Rolle; für ältere Schüler sind sie ganz signifikant einsichtiger und faßbarer als für jüngere Schüler.
Wenn Schüler den proportionalen Gedanken an Ähnlichkeitsproblemen sehen, dann sind sie auch motiviert und verwenden ihn. Aber für viele Schüler bleibt eben dies - wie früher erwähnt - ein großes Problem.
Für jüngere Schüler ist die Erfassung von ähnlichen Figuren überhaupt ein ziemlich großes Problem.

Ganz allgemein ergibt sich, daß die Schwierigkeit eines geometrischen Problems eng damit verknüpft ist, wieweit der Schüler sich "passend zum Problem" an einer Figur orientieren kann und wieweit er sich die Figur "organisieren" kann (z.B.: ist das eine Strahlensatzfigur? Wenn ja, wo ist der Scheitel? Wo sind Parallelen? etc.).
Viele Schüler gelangen schon aus diesen Gründen gar nicht zu einer korrekten Anwendung geometrischer Algorithmen auf Probleme, obwohl sie die Algorithmen und Konstruktionen "an sich" beherrschen.

Literaturhinweis: FUSON [1978]

Datentafel: Ähnlichkeit/Geometrie

Auflistung empirischer Daten zum Schülerverhalten im Lehr-Lern-Prozeß; die Daten wurden vor allem im Hinblick auf Fragestellungen der Ähnlichkeitsgeometrie gesammelt, gleichzeitig aber wurden Daten zum Themenkreis Geometrie so hinzugefügt, daß sich ein Gesamtbild ergibt. Die ausführliche Beschreibung der zugrundeliegenden Quellen finden sich in der Quellensammlung des DIDAKTISCHEN INFORMATIONSDIENSTES MATHEMATIK.

Image des Themas bei den Schülern	- Bei jüngeren Schülern - nicht-messende ebene und räumliche Geometrie beliebt, hohe Erfolgsquote - messende/maßbezogene Geometrie nicht so beliebt, geringere Erfolgsquote - Auch bei älteren Schülern zeigen sich keine besonders signifikanten Ablehnungen der Geometrie.
Strategien der Schüler algorithmischer Aspekt	Abzählen (an Flächen)/Auszählen von Flächen: viele Strategien, nur wenige davon zu "praktischen" Formeln generalisierbar. Flächenberechnung: Verwechslung von Flächeninhalt und Umfang; weitverbreiteter Reflex: "Fläche =" Länge mal Breite". Winkel: als Figur erfaßt, zunächst nicht unter dem Aspekt der "Neigung". Vertikales Orientierungs-Stützsystem: Spiegelungskonstruktion: leicht. Fehler durch Bindung an externe Orientierungssysteme (z.B. "horizontales Spiegeln"). "In den Spiegel blicken": erster Reflex ist "rechts und links sind vertauscht" (Zerstörung eines gewohnten externen Orientierungssystems). Symmetrien: werden meist "mit bloßem Auge" direkt erfaßt. Koordinaten- und Distanzvorstellungen: ab 11 / 12 Jahre vorhanden. Ähnlichkeit: - es gibt keine intuitive Anfangs-Vorstellung der mathematischen Ähnlichkeit. - an "ähnlichen" Figuren wird zuerst die Parallelität erfaßt und dann (ggf.) der Winkelvergleich durchgeführt; erst anschließend folgt der Längenvergleich (wenn überhaupt).

figuraler Aspekt	Lösungswege (und Lösungserfolge) werden beeinflußt durch - Komplexität der Figur - Analysierbarkeit der Figur - Lage von Figuren - Vorhandensein von inneren/äußeren Orientierungssystemen - Passung von Figuren und daran verlangten geometrischen Algorithmen.
numerischer Aspekt	Ähnlichkeit: - "natürliche" Ähnlichkeitsverhältnisse sind 1 : 2 und 2 : 1 - der Umgang mit anderen Ähnlichkeitsverhältnissen setzt volles proportionales Verständnis voraus (i.S. von Verhältnis-Gleichheit!)
informationsverarbeitender Aspekt	- sich in komplexen Figuren orientieren ist schwer - Erfolgsquoten der Schüler von der Informationsverarbeitung und der Breite des Wahrnehmungsfeldes sehr stark abhängig, besonders von der zum Problem passenden Figurenanalyse und der Fähigkeit, sich Figuren zu reproduzieren (mit Hilfe von figuren-, nicht problembezogenen (!!) Stützsystemen) - Geometrische Begriffe z.T. umgangssprachlich vorbelastet ("ähnlich", "kongruent", ...), weil dort anders gemeint
Faßbarkeit	Elementargeometrie: Topologie 7o % - 8o %, ebenso einfaches Zeichnen und Beschreiben von Figuren; Längenmessung 6o %, Flächenmessung 5o %, Raumgeometrie 5o %, Raummessung/Umfangsberechnungen 4o %. (%-Angaben sind Schwierigkeitsgrade) Spiegelungskonstruktion: leicht Spiegelungen: Schwierigkeit von Lage und Form der Figur abhängig ("Passung" zum Spiegelungsalgorithmus; Vorhandensein eines Stützsystems in der Figur, die gespiegelt werden soll: z.B. ist ein Dreieck leichter zu spiegeln als eine Fahne). Ähnlichkeitsgeometrie: - relativ schwierig, vor allem bei jüngeren Schülern; starke Altersspränge; - Obertragen von Längenverhältnissen fehleranfällig; - eine Zahl (z.B. Streckungsfaktor) gilt nicht als Verhältnis;

	- Einbringen von Proportionen in eine Figur und Ablesen von Proportionen schwierig. Schüler erwerben - vor allem in der Elementargeometrie - relativ großes, zusammenhängendes Wissen.
Sonstige Eindrücke	Ähnlichkeit: Schüler-Bereitschaft, mit Proportionen umzugehen, wächst, wenn die Schüler die Proportionen geometrisch "sehen". Dies gilt insbesondere für Vermessungsprobleme. Insgesamt nimmt die Bereitschaft zur "Algebraisierung" mit höherem Alter zu.

7.5 Der Aspekt "Brüche"

Oberblick über Erfahrungswerte

Zunächst fällt ins Auge, daß sich bei diesem Gebiet ganz offensichtlich die Schwierigkeiten und Probleme der Schüler extrem häufen. Brüche werden - soweit es sich nicht um 1/2 oder 1/4 handelt - als fremd und "abstrakt" (= nicht verständlich) empfunden. Dieser Eindruck wird verstärkt durch die Abgrenzung gegenüber natürlichen Zahlen und Dezimalzahlen, bei denen sich die Schüler relativ sicher und wohl fühlen.

Brüche werden kaum mit anderen Zahlenvorstellungen verbunden, insbesondere nicht mit anderen Aspekten von ℚ (Quotient, Proportion, Chance, dezimale Form, Division).

Schüler, vor allem jüngere, finden die Bruchrechnung unüberschaubar und riesig. Sie wenden Regeln nach Augenschein, Zufall oder aufgrund allgemeiner Plausibilitäten an. Es bilden sich auch Schülergruppen mit systematischem Fehlerverhalten aufgrund von perseverierenden, fehlerhaften und daher kaum heilbaren Regelsystemen.

Die Vorstellung von Brüchen ist gering ausgebildet. Im einzelnen gibt es hier Einflüsse der Methode und Repräsentationsform.
So schneidet die "regionale" Methode der Bruchrechnung ("Kuchenmethode") besser ab als die Operator-Methode und das Verhältnis-Modell (Bruch als Verhältnis); die regionale Bruchdarstellung ist auch leichter zugänglich als die Bruchdarstellung auf dem Zahlenstrahl.

Insgesamt ist der Erwerb von Vertrautheit mit der Bruchrechnung ein viel längerer und weitreichenderer Prozeß als seither (insbesondere in den Lehrplänen) angenommen, der auch einen viel höheren Grad an Individualisierung benötigt als vermutet.

Die Diskrepanz zwischen Schulbüchern und Faßbarkeit der Schüler ist in diesem Gebiet gleichzeitig außerordentlich hoch.

Literaturhinweis: HART [1981]

Datentafel: Brüche

Auflistung empirischer Daten zum Schülerverhalten im Lehr-Lern-Prozeß; die ausführliche Beschreibung der zugrundeliegenden Quellen findet sich in der Quellensammlung des DIDAKTISCHEN INFORMATIONSDIENSTES MATHEMATIK.

Image des Themas bei den Schülern	Schüler haben Angst vor Brüchen, weichen Brüchen aus. Es werden dabei Ersatz-/"Vereinfachungs"-/"Plausibilitäts"-Strategien angewendet. Dagegen fühlen sich Schüler im Umgang mit Dezimalzahlen (bis auf die Division) gleich sicher/unsicher wie beim Umgang mit natürlichen Zahlen. Schüler haben die Vorstellung einer hohen Identität von $\mathbb{D}$ und $\mathbb{N}$ im Sinne eines bezifferten, einvariabligen Systems mit lexikografischer Anordnung. Brüche werden als von Dezimalzahlen verschieden angesehen. Außer bei 1/2, 1/4 haben Schüler von Brüchen eine gering ausgeprägte Vorstellung. Brücne sind "zu abstrakt" (= nicht verständlich), sind keine neue Zahl, keine Proportion, kein Quotient.
Strategien der Schüler algorithmischer Aspekt	Quotientenvorstellungen von Brüchen: bei ca. 3o % der Schüler vorhanden; Fehlerstrategien dabei: "größer" durch "kleiner" teilen, Zähler von Nenner (oder umgekehrt) abziehen, mit Rest teilen. Anordnung: bei einfachen Brüchen (Halben und Vierteln) einfach, sonst viele Fehlerstrategien: 1/8 "größer" als 1/4, weil 8 Teile mehr sind als 4 Teile. Solche Fehlerstrategien werden durch das "Kuchenmodell" verstärkt. Erweitern/Kürzen: grafische Algorithmen einsichtig; rechnerische Verfahren undurchsichtig; viele Fehlerstrategien. Leistung korreliert hoch mit allgemeiner mathematischer Leistung. Addition: Zähler-Nenner-Additions-Strategie liegt bei 25 %, übrige Fehler bei 2o % (z.B. nur Zähler oder nur Nenner addiert oder nur Nenner erweitert, Verwechseln von Regeln ...).

	"Direkte" Methoden über Körpereigenschaften (z.B. bei der Subtraktion) erfolgreicher als Benutzung von Äquivalenzklassen. Multiplikation/Division: Mehrheit der Schüler zeigt chaotisches Regel-Auswahl-Verhalten; HN-Methode beim Dividieren besonders schwer (HN = Hauptnenner). Verwandeln gemischter Zahlen: sehr schwer. Fehlerstrategien: Multiplizieren, Zähler-Nenner-Vertauschung, ... Allgemeine Beobachtung: Bruchrechen-Algorithmen werden nur im engsten Umfeld sicher angewendet; Kopplungen verschiedener Algorithmen sind sehr schwierig. Schüler glauben unsinnige Ergebnisse; das Regelgebäude erscheint ihnen undurchschaubar, riesig.
numerischer Aspekt	1/2, 1/4 sind vertraute Brüche; alles andere sind "Kunstbrüche", sehr schwer.
informationsverarbeitender Aspekt	Auf Probleme aus der Bruchrechnung werden häufig allgemeine "logische" Denkplausibilitäten angewendet, z.B. analoge Interpretation von Zähler und Nenner oder Übertragen von Rechengrundsätzen aus IN (z.B.: "Multiplizieren macht größer"). Die im Bruch enthaltene Information ist in der "Teil-Ganze-Deutung" besser zugänglich als in der "Punkt-Deutung" auf dem Zahlenstrahl; viele Schüler sehen nämlich "Einheitsstrecken" überall zwischen den Markierungen und nicht nur von 0 bis 1. Es gibt kaum Korrelationen bemerkenswerter Größe zwischen Bruchrechnung und Proportionenrechnung, vor allem bei jüngeren Schülern.
Faßbarkeit	Lehren der Bruchrechnung: Während sich etwa 4o % der 12- bis 13-jährigen Schüler auf der transitorischen Stufe und etwa 1o % auf der formalen Stufe befinden, bieten die Schulbücher den Stoff zu etwa 2o % transitorisch und zu 76 % formal. Das regionale Modell der Bruchrechnung (Teil-Ganze-Vorstellung in Flächendeutung) ist leichter als das Verhältnis-Modell (Teil-Teil-Deutung).

Das Lehren der Bruchrechnung dauert viel länger als im Lehrplan vorgesehen.
Multiplikation und Division von Brüchen gelten als nicht einsichtig erklärbar.

Lernen von Bruchrechnung:
Das Lernen des ganzen Regelsystems der Bruchrechnung ist wesentlich schwieriger als das lokale Handhaben von Regeln in abgezäunten Aufgabengruppen.
Globale Messungen im 8. Schuljahr ergeben z.B. einen Schwierigkeitsgrad von 57 %. Allerdings liegen die Probleme im Detail:

Bereich 1: Bruch als Teil eines Ganzen, Erweitern mit 2, gleichnamige Brüche addieren; Schwierigkeitsgrad ca. 8o %

Bereich 2: Erweitern mit beliebigen Zahlen, Erweitern auf gegebene Nenner; Schwierigkeitsgrad ca. 6o %

Bereich 3: Addieren und Subtrahieren; Schwierigkeitsgrad ca. 38 %

Bereich 4: Dividieren und Multiplizieren; Schwierigkeitsgrad ca. 12 %. (Es gibt Hinweise dafür, daß der Schwierigkeitsgrad der Multiplikation methodenabhängig ist.)

Sichere Kenntnisse in den Bereichen 1, 2, 3, 4 weisen 7 - 1o % der Schüler auf, wobei der Anteil mit zunehmendem Alter leicht steigt.
Sichere Kenntnisse in den Bereichen 1, 2, 3 (und nicht in 4) weisen ca. 3o % der Schüler auf.
Sichere Kenntnisse in den Bereichen 1, 2 (und nicht in 3, 4) weisen ca. 25 % der Schüler auf.
1/3 der Schüler haben überhaupt keine oder höchstens einige im Bereich 1 liegende Kenntnisse.
Eine leichte Verbesserung der Kenntnisse ist bei allen Schülern mit zunehmendem Alter zu beobachten.

Es wird beobachtet, daß sich bezüglich der Bruchrechnung eine Schülergruppe ohne systematische Fehler und eine solche

	mit systematischen Fehlern bildet. Beim Erweitern/Kürzen liegt die systematische Fehlergruppe bei 25 % und weist ein Fehlermittel von 6o % auf; die Gruppe ohne systematische Fehler hat ein Fehlermittel von 2o %. Die Quotientenbeziehung a/b = a : b ist schwierig; die Aufgabe "a/b von c" ist extrem schwierig.
Sonstige Eindrücke	Schüler brauchen hohe Lehrerzuwendung, um Fehler zu vermeiden; geringe Effizienz des nicht individualisierten Lehrens. In Klasse 6 verbessert sich der Lernerfolg in der Bruchrechnung, wenn mehr und intensivere Lerngelegenheiten bestehen; dies ist bei anderen mathematischen Gebieten der Klassen 5/6 nicht in gleichem Maße der Fall.

7.6 Der Aspekt "Textaufgaben/Sachrechnen"

Oberblick über Erfahrungswerte

Viele Probleme der vorangehend beschriebenen Bereiche werden in Textform vorgelegt, vor allem beim Sachrechnen. Daher ist die Betrachtung des Schülerverhaltens gegenüber textlich gestellten Problemen wichtig.

Viele Befunde deuten darauf hin, daß Angst und Abneigung vor jeder Art von Textaufgabe ernsthafte Lösungsversuche oft schon vorab verhindern. Auch liegen manche Gebiete, die "man" i.A. für interessant hält, z.B. wirtschaftliche Probleme, gar nicht im Interessengebiet der Schüler.

Im Mittelpunkt jeder Bearbeitung von Textproblemen stehen die Informationsverarbeitung und die im Zusammenhang damit gewonnenen Strategien.

- Bei der Informationsverarbeitung des gegebenen Textes gewinnt der Schüler zunächst ein durch Signalwörter/Signalpassagen bestimmtes Bild des Textproblems, wobei die Signalwörter individuell ganz verschieden sein können. So kann z.B. bei einem Benzinverbrauchsvergleich zwischen einem "alten Käfer" und einem "schicken Golf" der "alte Käfer" für bestimmte Schüler ein so starkes Signal werden, daß dies die Lösung des Textproblems entscheidend beeinflußt.
- Der auf Signalpassagen reduzierte Text wird dann vom Schüler mit mathematischen Operationen in Zusammenhang gebracht, "weil die Aufgabe in Mathematikunterricht vorkommt".
  Häufig werden dabei direkte Obertragungen vom (Signal-) Wort zur Rechnung gesucht (z.B. "mehr als" = plus, "reduzierter Preis" = abziehen). Der Kontext der Signalpassage bleibt dabei oft ganz außer Acht.
  Auch Erinnerungen an "ähnliche" Aufgaben spielen eine Rolle, wobei schon rein oberflächliche Verwandtschaften entscheidend sein können ("Rabattaufgabe" = Prozente abziehen).
  Trends, möglichst "im Text verbleibend" zu rechnen, mit nur 1 Rechnung auszukommen, möglichst wenig zu schreiben, ganz am Taschenrechner zu verbleiben, möglichst niedere Rechenarten zu wählen, reflexhaft- unreflektiert zu arbeiten, sind zu beobachten.

Gegenüber den Schwierigkeiten der Textverarbeitung und Strategiefindung treten die rechnerischen Merkmale der Textaufgabe etwas zurück. Zwar ist die Schwierigkeit einer Textaufgabe auch davon abhängig, aber grundlegender erscheinen die informationsverarbeitenden Aspekte. Auch die Lesefertigkeit spielt keine zentrale Rolle.

Die informationsverarbeitenden Aspekte wiederum hängen offensichtlich stark mit dem Erfahrungsfeld und der Persönlichkeitsstruktur des Schülers zusammen. Es gibt z.B. eine Gruppe von Schülern, die aus einem eingeengten Erfahrungsfeld heraus ein "absolutes Verständnis" ökonomischer Probleme hat (Preis als ausschließliche Eigenschaft des Objekts) und daher etwa in Textproblemen Angaben über den Markt von vorneherein als irrelevant ausschließen wird. Probleme mit dem Erfahrungsbereich bauen sich mit dem Alter etwas ab.
Bei der Persönlichkeitsstruktur spielt die mathematische Einstellung und das mathematische Selbstkonzept eine erhebliche Rolle, aber auch Konzentrationsfähigkeit, Geduld, Ausdauer etc.
Ebenso bedeutsam ist die Fähigkeit, das Gedächtnis zu organisieren (z.B. langfristig wichtige Informationen zu erkennen und zu speichern).

Literaturhinweis: MAIER/SCHUBERT [1978]

Datentafel: Textaufgaben/Sachrechnen

Auflistung empirischer Daten zum Schülerverhalten im Lehr-Lern-Prozeß. Die ausführliche Beschreibung der zugrundeliegenden Quellen finden sich in der Quellensammlung des DIDAKTISCHEN INFORMATIONSDIENSTES MATHEMATIK.

Image des Themas bei den Schülern	- Kern der Mathematikangst; das an sich vorhandene Interesse ist durch negative Erfahrungen überlagert. Oft wird daher überhaupt nicht der Versuch gemacht, Textprobleme ernsthaft zu lösen. - Anspruch und Schwierigkeit der Aufgaben verdecken den Realitätsbezug. - Statistische Probleme werden positiv aufgenommen, aber kein großes Interesse an wirtschaftlichen Problemen. - In Kl. 8 finden Glücksspiele großes Interesse.
Strategien der Schüler	
algorithmischer Aspekt	- Versuch, Textprobleme durch "im Text verbleibendes Erdenken der Lösung" zu verarbeiten. Forderung des Lehrers, auf eine mathematisch-symbolische Verarbeitung überzugehen, verunsichert den Schüler. - Es wird versucht, mit 1 Rechnung zu Ende zu kommen. Dabei werden individuell verschiedene Algorithmen zur Problemlösung verwendet und gerne auch der Taschenrechner herangezogen (er gilt als nützlich, vertrauenswürdig und als geduldiger Lehrer). Gelingt dieser Ansatz nicht, so entsteht oft totale Resignation. - Häufig werden die Texte auf Ähnlichkeiten mit bekannten "Musteraufgaben" abgeklopft und die Lösung nach einem Muster vorgenommen, das oft anhand von Übereinstimmung in Pseudostrukturen (Alter, Gewicht, Frageform etc.) ausgewählt wird. Beliebt ist der Dreisatz (irgendwie) und das Teilen (irgendwie). - Werden Probleme in Textform gestellt, so suchen die Schüler meist Lösungsmuster oder Lösungsformen. Werden die Probleme in realer Form gestellt, so suchen die Schüler eher Lösungen des Problems.

- Bei proportionalen oder proportional erscheinenden Aufgaben ist die Grundstrategie "Teilen-Malnehmen", wobei erst Schüler ab Kl. 9 stärker über die Einheit gehen. Diese Grundstrategie wird aber oft verlassen, sobald es nicht aufgeht. Dann treten Additionsstrategien, Verdoppeln/Halbieren etc. auf, selbst dann, wenn dadurch die Aufgabe verändert wird.
- Bei Aufgaben mit %-Angaben wird meist irgendwie durch 100 geteilt.
- Bei Bewegungsaufgaben wird beobachtet, daß Schüler entweder die "Mitte suchen" und von dort aus (z.T. algorithmisch, Schritt für Schritt) Feinkorrekturen vornehmen, oder daß sie die Mitte als Lösung ablehnen und dann einen "Fahrplan" aufstellen, der die gegenseitige Annäherung veranschaulicht. Bewegungsgleichungen o.ä. geschlossene algebraische Verfahren werden ohne Lehrereinfluß meist nicht herangezogen.

numerischer Aspekt

- Für jüngere Schüler ist bei proportionalen Aufgaben die Teilbarkeit ein entscheidendes Kriterium für die Schwierigkeit der Textaufgabe; immer entscheidend ist die Größe der Zahlen und die Komplexität der Beziehungen.

informationsverarbeitender Aspekt

- Textprobleme werden zunächst global aufgenommen, wobei der erste Augenschein entscheidend ist. Hier wird vor allem auf die "Kompliziertheit der Zahlen" und auf einzelne Sprachbausteine - individuell verschieden - reagiert.
Sprachbausteine wie "und", "bekommt", "mehr als" rufen - vor allem bei jüngeren Schülern - Additionsstrategien auf, "weniger als" ruft Subtraktionsstrategien auf.
Solche Sprachbausteine mit Reizwirkung machen die übrigen, oft wesentlichen Informationen, zunichte.
Dieses Grundverhalten macht es unmöglich, eine direkte Übersetzung des Textes in eine mathematische Form vorzunehmen.
Die Ablenkbarkeit und das Reaktionsverhalten gegenüber dem Text und seinen Informationen wird kaum durch die Komplexität der Aufgabe oder die Lesefertigkeit bestimmt, sondern vor allem durch die Persönlichkeitsstruktur und hier widerum weitgehend durch die Fähigkeit und das Interesse, mit dem Problem selbst umzugehen.

- Vor der eigentlichen Bearbeitung wird der Text 2 bis 4mal gelesen, doch liegt die Strategie - wie soeben beschrieben - dann oft schon fest.
  Resultatprüfungen erfolgen praktisch nie. Ergebnisse, die irgendwie ausgerechnet worden sind, werden als "mathematische" Lösung betrachtet und als solche nicht mehr überprüft. Diese Ergebnisse werden vom Schüler aber nicht unbedingt als "echte Lösung des Problems" angesehen (Schülerzitat: "ich habe mathematisch gearbeitet, nicht logisch").
- Je mehr mathematische Verfahren die Schüler kennen, umso unsicherer werden sie in der Wahl der für eine Textaufgabe geeigneten Methoden.
- Bei Textaufgaben aus dem Bereich der Proportion beobachtet man oft wildes Kombinieren der vorkommenden Zahlen; %-Aufgaben lösen oft einen "teile durch 100-"Reflex aus und häufig werden Prozentwert und Grundwert verwechselt. Insgesamt spielen in diesem Gebiet Standard-Reflexe (Rückgriff auf Muster und Rezeptverfahren) eine große Rolle.
- Bei Zufallsproblemen spielt die mit dem Wort "Zufall" verbundene Vorerfahrung eine große, meist störende Rolle (Zufall = Unberechenbarkeit), die nur schwer abzubauen ist.
- Bei ökonomischen Problemen haben viele Schüler von den Daten ein "absolutes" Verständnis (z.B. Preis ausschließlich als Eigenschaft des Objekts) und kein "relatives" Verständnis (z.B. Preis als Ergebnis von Angebot und Nachfrage). Dies verstärkt die Tendenz zu unrealistischen Lösungsverfahren.

Faßbarkeit allgemein

- Die Schwierigkeit einer Textaufgabe ist abhängig von
  -- der Anzahl der Simplexe (Rechenschritte) und davon, ob diese linear aufeinanderfolgen oder nicht
  -- der Anzahl der vorkommenden Brüche und der Größenumwandlungen
  -- der Vertrautheit der im Text beschriebenen Situation
  -- der Explizitheit der Frage und Klarheit der Präsentation
  -- dem Bezug ins Auge fallender Sprachbausteine zur wirklichen Fragestellung
  -- der Art der notwendigen Operationen (Schwierigkeiten insbesondere von der Addition zur Division hin ansteigend).

	- Fähigkeit, induktiv zu denken, beeinflußt das Problemlöseverhalten sehr stark - Schwierigkeit stark abhängig von der Identifikation mit dem Problem, vor allem bei jüngeren Schülern - Von der Realitätsnähe der (numerischen) Daten wird die Faßbarkeit kaum beeinflußt - Die Anzahl der Worte im längsten Satz der Aufgabe sowie die Anzahl der vom üblichen Sprachgebrauch abweichenden Wortumstellungen beeinflussen die Schwierigkeit - Schwierigkeitsunterschiede in den Aufgabenteilen einer mehrteiligen Textaufgabe erschweren die Lösung insgesamt - Sachprobleme aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung: die Mathematisierung einstufiger Experimente ist nicht schwer, jedocn die Mathematisierung mehrstufiger Experimente. Insgesamt ist jedoch eine "stochastiscne Sensibilisierung" notwendig und möglich.
altersbezogen	- bei schwächeren Schülern werden deutliche Fortschritte im Lösen von Textproblemen mit zunehmendem Alter beobachtet, vor allem ab Kl. 9 - insgesamt nimmt die Lösungsfähigkeit für Textprobleme mit dem Alter zu, gleichzeitig aber auch die Häufigkeit von Flüchtigkeitsfehlern und Uninteressiertheit - das Anfertigen von Notizen vor dem systematischen Rechnen wird erst in höherem Alter beobachtet - bei Schülern bis zu 12 Jahren werden hypothetische Texte besser verarbeitet als reale Texte; später ist es eher umgekehrt.
Sonstige Eindrücke	- Probleme und Strategien der Schüler in diesem Gebiet sind, seit es darüber Messungen gibt, unverändert (ca. 5o Jahre) - Im Alter von 8 bis 12 Jahren lösen Mädchen Zahlenrätsel in Textform besser als Jungen - Folgende Persönlichkeitsmerkmale erscheinen bedeutsam für die Lösungsfähigkeit bei Textproblemen: Angst, Folgsamkeit gegenüber Anweisungen, Selbstkonzept, Konzentration und Interessenbreite, Ausdauer und Geduld, reflexives vs. impulsives Denken.

- Ebenso bedeutsam ist die Fähigkeit, lang- und kurzfristig sinnvolle Informationen unterscheiden und entsprechend strukturiert im Gedächtnis speichern zu können.
  Vor allem Schüler im Alter von 8 bis 12 Jahren behalten und verwechseln diese Kategorien wahllos. Sie vergessen auch häufig und sofort nach Erreichen eines Endresultats alle Informationen, die zu seiner Gewinnung notwendig waren und verwendet wurden.

8 DIE LAGE IM BEOBACHTUNGSFELD - EINE VERGLEICHENDE INTERPRETATION

Wenn wir anhand der empirischen Daten vergleichen, so läßt sich dreierlei erkennen:

- es gibt Bereiche, in denen praktisch alle Schüler durch den derzeitigen Mathematikunterricht zu Grundvorstellungen gelangen. Dies wird durch die folgende Tabelle gezeigt:

Bereich	erworbenes Konzept
N, D	Rechnen in bezifferten Systemen
direkte Schlußrechnung	Isomorpher Zusammenhang
Funktionen	1-1-Zuordnung
Graph	Geometrisches Muster mit Informationen
Ebene Geometrie	Grundvorstellungen, Grundalgorithmen
Ähnlichkeitsgeometrie	durch Parallelität und/oder Winkelvergleich prüfbare Figurenverwandtschaft

- es gibt Bereiche, in denen die Mehrheit der Schüler intuitive Grundvorstellungen entwickelt, deren Weiterentwicklung zu mathematischen Konzepten aber höchst fraglich und unterschiedlich ist. Dies ist der Bereich der "einfachen Brüche" und der "Verständnisse" (vor allem im internen Sinne).

- es gibt Bereiche, die nur sehr schwer und meist nur selektiv zugänglich sind. Dazu zählt die Bruchrechnung und die Proportion (i.S. von externer Verhältnisgleichheit).

Insgesamt bilden sich somit auch kaum "Verbindungskonzepte", wie etwa

- Konzept der Proportionalität und Antiproportionalität unter gemeinsamem funktionalen Gesichtspunkt,
- Konzept der Funktionen als spezielle Relationen,
- Konzept der rationalen Zahl als Objekt mit verschiedenen Repräsentationsformen und Eigenschaften und als Oberbegriff eines Zahlensystems.

Die Gegenüberstellung zu den fachsystematischen Zielen des Mathematikunterrichts zeigt somit - bis auf die Geometrie - eine erhebliche Diskrepanz und dies im Bereich der erwarteten Fertigkeiten wie im Bereich der Grundkonzepte und zentralen Ideen.

Auch in Gegenüberstellung zu wichtigen Zielen des anwendungsorientierten Mathematikunterrichts ergeben sich Probleme. Die Eigenarten und Schwierigkeiten der Textverarbeitung durch Schüler schlagen gerade hier im "Sachrechenbereich" voll zu Buche.

Eine große Zahl der Befunde deutet darauf hin, daß in weiten Teilen des Mathematikunterrichts Verstehens- und Verständigungsprozesse erst gar nicht in Gang kommen, weil Lehrer und Lerner auf verschiedenen "Wellenlängen" bzw. in verschiedenen Systeme sitzen.
Dies führt dann seitens der Schüler entweder zu formelhaft-rezeptmäßigem Momentanlernen oder zu allgemeinen Abwehrhaltungen.

Schließlich wird deutlich, daß Mathematikunterricht auch an Grenzen und Eigenarten von Persönlichkeitsstrukturen stößt.

Im nächsten Abschnitt soll versucht werden, aus den erkannten Diskrepanzen und Eigenarten des Mathematiklernens im Beobachtungsfeld didaktisch-methodische Entscheidungshilfen abzuleiten.
Diese "Tips" haben einen anderen Stellenwert als die bis jetzt gemachten Aussagen. Sie sind zwar "begründet", jedoch insofern "hypothetisch", als sie vernünftige Annahmen sind, deren Auswirkung noch nicht genau erhoben wurde. Es wird dabei auch unterstellt, daß durch unterrichtliche Reaktionen und Veränderungen Schülerverhalten verändert werden kann. Schließlich richten sich diese Tips an bestimmten, "erstrebenswerten" Zielen aus.
Grundlage für diese Vorschläge sind hauptsächlich Angaben in den hier verwerteten Arbeiten der empirischen Unterrichtsforschung und in den zugrundegelegten Lehrerumfragen.

Vorschläge zum Unterricht

9 DER BEREICH "PROPORTION" IM UNTERRICHT

In den folgenden Abschnitten werden aufgrund der vorangegangenen fachwissenschaftlichen, fachdidaktischen und empirischen Analysen Vorschläge zum Unterricht gemacht.

9.1 Der Aspekt "Verhältnisse" im Unterricht

9.1.1 Unterrichtsziele und ihre Legitimation

Die hohe Bedeutung proportionalen Denkens für Erfolg im Mathematikunterricht, sein vielfältiges Eindringen in viele Stoffgebiete, seine außermathematische Bedeutung in vielen Anwendungsbereichen verlangen, die Vorstellung von der Proportion soweit als möglich zu fördern. Dies gilt insbesondere auch für Gesamtschulen, Realschulen und Hauptschulen.

Gemäß unseren Recherchen ergibt sich für den Unterricht dabei folgendes Haupt-Lenrziel:

- Entwicklung des proportionalen Denkens als eigenständige Vorstellung, auch in konkreten Zusammenhängen und in altersgerechter Stufung, die zunehmend zur Verbindung mit anderen Vorstellungen (Bruchrechnung, Funktion etc.) führt.

Drei Teilziele des Lehrens heben sich hierbei besonders heraus:

- Pflege und mathematische Weiterentwicklung der intuitiven Vorstellung vom "internen" Verhältnis (vgl. S. 47)
- Erweiterung des Gesichtsfeldes der Schüler für die Betrachtung von "externen" Verhältnissen (vgl. S. 47)
- Kontrollierter Umgang mit externen Verhältnissen.

Es ist aufgrund unserer empirischen Analysen sinnvoll, diese 3 Teilziele als Stufen eines Spiralcurriculums aufzufassen. Wir ordnen sie daher (grob) den Jahrgangsblöcken 5/6, 7/8, 9/10 zu.

9.1.2 Didaktisch-methodische Vorschläge

a) Pflege und mathematische Weiterentwicklung der intuitiven Vorstellung vom "internen" Verhältnis (Kl. 5/6)

Die Vorstellung vom "internen" Verhältnis ist ein Kontaktpunkt zwischen Schülern und Mathematik, da diese Vorstellung beim Schüler schon intuitiv vorhanden ist.
Pflege und Weiterentwicklung (sowohl formal wie in Richtung auf externe Verhältnisse) kann man auf folgende Weisen erreichen:

- Betrachten von Bildern mit "verzerrten" Größenverhältnissen (z.B. in Comics, Bilderbüchern, ...)
- Betrachten von Fotografien und Diskussion der Größenverhältnisse (auch in bezug zur Wirklichkeit)
- Vorgabe eines Bildes, z.B. eines Hauses. Die Schüler sollen sich selbst dazu zeichnen/einordnen.
- Vorgabe eines Bilddetails (z.B. Haustür). Die Schüler sollen das ganze Bild (z.B. Haus) zeichnen.
- Einen Gegenstand mit mehreren Größenmerkmalen betrachten, dann ein Bild/Modell von ihm. Vergleichen und abschätzen, ob die Größenverhältnisse stimmen können.
  Dann evtl. diesen Gegenstand in Beziehung zu einer neuen Bezugsgröße setzen (z.B. ein Haus als Puppenhaus deklarieren).
- Abschätzen von "Chancen" (z.B. aus einer gemischten weiß-schwarz-Urne "weiß" zu ziehen); dabei die Repräsentationsform wechseln (Urne/Glücksrad/Streckenverteilung).

Bei diesen Situationen ist es nicht wichtig, Berechnungsstrategien zu entwickeln (wiewohl dies schon proportional denkende Schüler tun werden und daran zu erkennen sind!), sondern Sicherheit in der Beurteilung von Verhältnissen zu vermitteln.
Bei der Angabe von Verhältnissen sollten alle von den Schülern genannten Formen aufgegriffen und kritisch nebeneinander gestellt werden (also z.B.: bei einer Urne mit 10 weißen und 5 schwarzen Kugeln ist die Chance, weiß zu ziehen statt schwarz, "2 : 1" / "doppelt so groß wie für schwarz" / "2 von 3" / "jede dritte Kugel gewinnt nicht"),

ohne ein mathematisches System daraus zu machen. Entscheidend ist, daß der Lehrer erkennt, wieweit die einzelnen Schüler schon proportionale Vorstellungen entwickeln; entscheidend ist auch, daß die Schüler verschiedene Denkansätze kennenlernen.

Die Wahl einer Bezugsgröße (als "Einheit") kann gefördert werden (also z.B. statt 2 : 4 auch 1 : 2 oder 1oo : 2oo).
Die angegebenen Situationen sind so gewählt, daß nicht nur Verhältnisse zwischen abzählbaren Mengen vorkommen.
Vorsicht ist geboten bei der Verwendung des Zahlenstrahls. Er hat für die Schüler keinen "Streckenverteilungscharakter", sondern wird als "angeordnete Zahlenpunktkette" oder als Anhäufung lauter gleicher Strecken gesehen.
Maßstäbliches Zeichnen fördert proportionales Denken nur, wenn Original und Bild (samt ihren Details) wirklich verglichen werden können; dies ist bei Landkarten-Aufgaben i.A. nicht der Fall.

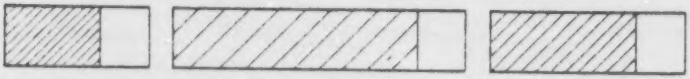
Wann bieten sich Möglichkeiten für die vorgeschlagenen Situationen in Kl. 5/6?

- Häufig beim Betrachten von Gegenständen, Figuren und Bildern,
- zahlreich in der Geometrie,
- bei der experimentellen Behandlung von Glücksspielen,
- bei der Betrachtung von Bruchbildern in "Kuchen-" oder "Streifenform",
- bei Streifendiagrammen.

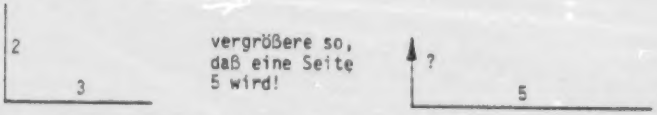
b) Erweiterung des Gesichtsfeldes der Schüler für die Betrachtung von "externen" Verhältnissen (Kl. 7/8)

Hier geht es um die gleichzeitige Kontrolle mehrerer Variablen, den Vergleich von Verhältnissen, die Herstellung "gleicher" Verhältnisse zu gegebenen und das Bewußtmachen zugehöriger Strategien.
Geeignet dafür sind:

- Vergleich von Streifenmustern:



- Vergrößern von Rechtecken:



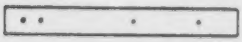
(besonders auch geeignet für Strategie-Entwicklung und Diskussion fehlerhafter Strategien wie: 2 : 3 = (2 + 2) :(3 + 2))

- Quer angelegte (Meß-)tabellen mit Lücken, bei denen zu entdeckende (vertikale) Zusammenhänge zwischen den Variablen bestehen (z.B. konstante Summe, konstante Differenz, ...). Der Taschenrechner kann hier als Untersuchungsinstrument mit Vorteil eingesetzt werden.

  ACHTUNG: nicht Schlußrechnen damit koppeln! Keine "Paarmengen" bilden!

  Solche Tabellen sollten auch über Experimente gewonnen werden.

- Zeichnerische Simulation eines physikalischen Experiments, z.B.:



Ein Gummiband mit Punktmuster soll (in Gedanken) auf eine neue Länge gedehnt und so gezeichnet werden.

- Aufgabenstellungen, die Identifikation und Kontrolle mehrerer Variablen erfordern.

  o "Jemand kauft 5 m Teppich für 2o DM." Ohne Rechnung geht es hier zunächst um die 2 relevanten Größen, die sich immer entsprechen.
  Dann Einbringen in eine Wertetabelle (quer mit vertikalem Zusammenhang, keine Schlußrechnung!).

  o Eine der wichtigsten Aufgabenstellungen in diesem Zusammenhang ist der Vergleich von Chancen in 2 Urnen. Besondere Obung verlangt dies bei gleichen Verhältnissen.

Wegnehmen und Hinzufügen von Kugeln zur Variation der Versuche ist wichtig.
Diese Aufgabenstellung soll auch variiert werden (z.B. Herstellen von Fruchtsaft durch Mischen von Sirup und Wasser in verschiedenen Anteilen und Geschmacksvergleich.

o Arbeiten in Mehr-Felder-Tafeln (wie überhaupt mit Tabellen) kann ebenfalls das Wahrnehmungsfeld und die Fähigkeit fördern, mehrere Variable gleichzeitig zu erfassen. Beispiel für Obergangshäufigkeiten von Noten in zwei aufeinanderfolgenden Klassenarbeiten:

Note KA 1 / Note KA 2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Bei all den angegebenen Situationen ist es wichtig, daß die Aufgaben konkret sind, aber nicht zu viele Nebeninformationen enthalten; es darf nicht komplexes Sachrechnen, aber auch nicht systematisches Schlußrechnen werden.

Die Denkwege der Schüler sollen aufgedeckt werden, auch ihre Schreibweisen. Normierungen von Rechenverfahren oder gar die Einführung von Standardregeln im Umgang mit Verhältnisgleichungen sind zu vermeiden.
Z.B. werden beim Vergleich von Chancen, "weiß" zu ziehen, wobei Urne I (2w/3s) und Urne II (3w/4s), Schreibweisen wie 2 : 3, 3 : 4, oder 2/3, 3/4 oder noch andere vorkommen.
Auch sehr verschiedene Argumente sind zu erwarten, z.B.: "dort ist mehr schwarz" (der Schüler erfaßt nur die 2 Variablen "schwarz"!), "der Anteil von weiß in I ist 2 von 5, in II aber nur 3 von 7" (der Schüler erfaßt alle Variablen, kann Chancen berechnen, kann Verhält-

nisse vergleichen, besitzt aber noch keine rein formale Strategie bzw. wendet sie nicht an), "2 : 3 ist weniger als 3 : 4" (der Schüler besitzt auch formale Strategien und beginnt, die internen Variablen zu einer Zahl zu verschmelzen) etc.

Der Lehrer kann nun erkennen, wie weit die Schüler im proportionalen Denken sind. Durch eine Diskussion der angegebenen Strategien wird der Erfahrungsraum für die Schüler erweitert. Gleichzeitig wird deutlich, welch großen "jump" die Umstellung von Variablen einer Verhältnisgleichung, bezogen auf das zugrundeliegende Experiment, bedeutet. In unserem Beispiel wäre das ein Austausch von Kugeln zwischen zwei Urnen. Rein formale algebraische Techniken sollten demnach hier (noch) nicht Platz greifen.

Bei gleichen Verhältnissen werden die Schüler z.T. Strategien aus der Bruchrechnung nennen (Erweitern, Kürzen, Hauptnenner, Stammbruch als Vergleichsgröße). Auch hier sollte eine Normierung, insbesondere eine Algebraisierung oder der Weg über die Berechnung der Chancen als alleiniges Mittel, vermieden werden.

Im Lehrplan der Klasse 7/8 bietet sich vor allem das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Weiterentwicklung des proportionalen Denkens an. Es muß allerdings der Gesichtspunkt "Chancenvergleich" bei Experimenten stark hervorgehoben werden.

Von einer allzu engen Verbindung des Verhältnisdenkens mit der Schlußrechnung, %-Rechnung, Funktionslehre, beschreibenden Statistik sowie der algebraischen Gleichungslehre wird auf dieser Altersstufe abgeraten. Durch die relativ späte Verfügbarkeit über proportionale Vorstellungen werden dann in all den genannten Bereichen Schüler unnötigerweise behindert; außerdem spielen - wie wir aus den vorangegangenen Analysen wissen - in die genannten Bereiche noch ganz andere, charakteristische Vorstellungen herein, die zuerst einmal entfaltet werden sollten.

Es müssen in Kl. 7/8 eigenständige Freiräume für proportionale Überlegungen im obengenannten Sinne geschaffen werden. Dies kann durch Reduktion der logischen Anteile der Gleichungslehre und ihrer Auswüchse weitgehend erreicht werden.

Bei der Behandlung der Graphen linearer Funktionen können die o.e. Vergrößerungsprobleme auf Steigungsdreiecke angewendet werden.

c) Kontrollierter Umgang mit externen Verhältnissen (Kl. 9/1o)

Der kontrollierte Umgang mit Proportionen verlangt u.a.

- Identifikation verschiedener Schreibweisen als gleichwertige Repräsentationsformen
- Auffassung der Proportion als Äquivalenzklasse (evtl. ohne Kenntnis des Begriffs)
- "Verschmelzen" der beiden Variablen eines Verhältnisses a/b zu "einer" Zahl
- "Auflösen" der beiden Bestandteile eines Verhältnisses und ihre Freigabe im Rahmen einer Verhältnis(un-)gleichung zu rein formal-algebraischen Manipulationen.

Es ist unmittelbar einsichtig, daß dies ohne die in a) und b) erwähnten Fähigkeiten nicht möglich ist.
Altersmäßig bietet die Klasse 9/1o für das Erlernen eines kontrollierten Umgangs mit Proportionen im beschriebenen Sinne die besten Voraussetzungen. Sie bietet diese Voraussetzungen auch stofflich, sind doch jetzt die verschiedenen Aspekte und Verfahren bekannt. Sie müssen allerdings zusammengebunden werden, und zwar mehr durch verbundene Verwendung als durch Erstellen einer übergeordneten mathematischen Theorie.

Am besten geschieht dies durch komplexere Anwendungsaufgaben, z.B. aus der beschriebenen Statistik, aus der Physik, der Chemie etc. Die Verbindung mit Experimenten und Meßreihen ist wichtig. Auch die Ähnlichkeitsgeometrie (samt trigonometrischen Messungen) spielt hier eine wichtige Rolle.
Bei solchen Anwendungsproblemen treten von selbst ganz verschiedene Strategien auf:

- funktionale Strategien
- Schlußrechnen
- Verhältnisse/Verhältnis(un-)gleichungen
- %-Oberlegungen etc.

86

Durch Freigabe der Lösungswege und anschließendem Vergleich wird der kontrollierte Umgang mit Proportionen effektiv erreicht.

Methodisch ist dabei folgendes zu beachten:

- der Schüler darf nicht den Eindruck bekommen, daß es eine Normstrategie gibt; vielmehr muß er erkennen, daß es viele, "im Grunde auf das Gleiche hinauslaufende" Wege gibt.
  Dieser Eindruck kann dadurch verstärkt werden, daß man das gleiche Experiment in verschiedener Weise betrachtet.

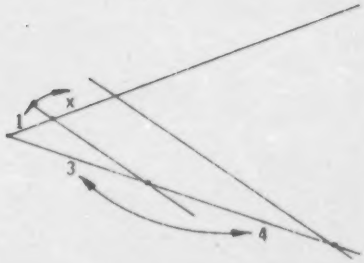
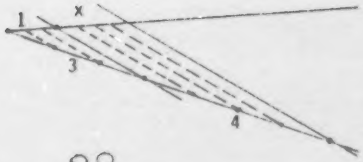
  Ein Beispiel:

  2 Gläser Sirup werden mit 5 Gläsern Wasser gemischt.
  Betrachtet man das Experiment "vom Entstehen" her, so ist das Mischungsverhältnis 2 : 5.
  Betrachte ich das Experiment "vom Ergebnis" her, so ist z.B. der Sirupanteil in der Mischung 2 : 7, der Wasseranteil 5 : 7.
  Oder: 2/7 der Mischung sind Sirup, 5/7 Wasser.

  Will man mit einer anderen Mischung vergleichen, so können wieder beide Standpunkte eingenommen werden; je nach den Angaben, die man besitzt, und je nach den Ergebnissen, die man will, ist der eine oder andere Standpunkt "zweckmäßiger".

- Es muß die "Ganze-Zahlen-" und "Glatte-Ergebnis-"Mentalität abgebaut werden.
- Es muß die Assoziation von 2 physikalischen Größen (z.B. 3 km und 2 h) zu einer Größe (z.B. Geschwindigkeit) gefördert und hierbei der funktionale Gesichtspunkt (Steigung, Proportionalitätsfaktor) betont werden.
- Es soll das "Rechnen mit Rest" nochmals aufgegriffen und im Zusammenhang mit Verhältnissen und rationalen Zahlen geklärt werden.
- Es soll vor allem die Behandlung von Bruchgleichungen und Verhältnisgleichungen gekoppelt werden (aber erst jetzt, nicht bei der ersten Einführung in Kl. 7/8!!).
- Es soll bewußt gemacht werden, welche unterschiedliche Bedeutung "äquivalente" Verhältnisgleichungen haben.

Beispiel:

Bruchgleichung	Verhältnisgleichung		Deutung
$\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$	$1 : x = 3 : 4$		entsprechende Abschnitte auf <u>je einem</u> Strahl
$\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{4}$	$1 : 3 = x : 4$		<u>je gegenüber-liegende</u> Abschnitte
$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{1}{3} = x$	$4 : 3 = x : 1$		entsprechende Abschnitte auf <u>je einem</u> Strahl <u>oder:</u> Einführen einer "gemeinsamen" Teilung

Im Unterricht der Klasse 9/10 kann für die o.e. Anliegen Platz gewonnen werden, u.a.

- im Rahmen der Geometrie, vor allem der Ähnlichkeitsgeometrie und Trigonometrie
- durch Wegfall der Bruchungleichungen
- durch starke Reduktion der algebraischen Potenzrechnung, der Bruchgleichungslehre samt jeweils zugehöriger Textaufgaben
- durch Reduktion des aussagenlogischen Überbaus der Gleichungslehre.

Für den funktionalen Aspekt der Proportion (samt Sachaufgaben) bietet sich Gelegenheit bei der Behandlung von Wachstumsfunktionen (z.B. Zinseszinsaufgaben mit Wachstumsraten-Berechnung unter Zuhilfenahme des Taschenrechners).

Die Einführung trigonometrischer Funktionen über Klassen ähnlicher Dreiecke - wie auch der Ähnlichkeitsbegriff selbst - ist eine gute Möglichkeit, die Auffassung der Proportion als Äquivalenzklasse zu festigen.

Die Erwartungen des Lehrers an die Schüler, kontrollierten Umgang mit Verhältnissen im beschriebenen Sinne zu erreichen, dürfen nicht sehr hoch geschraubt werden. Die Mehrheit der Schüler dürfte aber bei dem geschilderten Vorgehen in der Lage sein, Verhältnisse zu erkennen, Verhältnisse zu vergleichen und durch Brüche auszudrücken.

9.2 Der Aspekt "Schlußrechnen" im Unterricht

9.2.1 Unterrichtsziele und ihre Legitimation

Das (sog.) "Schlußrechnen" stellt nach unseren Analysen sowohl fachdidaktisch wie unterrichtspraktisch ein Verbindungsglied zwischen funktionalen, proportionalen und isomorphen Denkkonzepten dar; gleichzeitig hat es hohe Anwendungsbedeutung.
Diese Eigenart rechtfertigt eine bedeutende Stellung im Mathematikunterricht, bringt aber auch eine Bescheidung in den erreichbaren Zielen.

Gemäß unseren Recherchen ergibt sich für den Unterricht dabei folgendes Haupt-Lehrziel:

- Entwicklung eines Konzeptes beim Schüler, das es ihm ermöglicht, geeignete inner- und außermathematische Probleme unter Anwendung funktionaler, proportionsbezogener und isomorpher Methoden zu lösen.

Vor allem unsere empirischen Analysen haben klar gezeigt, daß sich dieses Lehrziel gerade dann nicht erreichen läßt, wenn man den oben erwähnten Methodenverbund schon von Anfang an, also auch und gerade beim jungen Schüler, einsetzt.

Vielmehr ergeben sich folgende Teilziele des Lehrens in altersgerecht gestufter Weise:

- Zugang zum Schlußrechnen samt Anwendungen über das isomorphe Rechnen, verbunden mit grafischen Darstellungen - ohne funktionale und proportionale Konzepte (Kl. 5/6/7)
- Versuch einer Erweiterung des Schlußrechnens unter Hinzunahme funktionaler Konzepte, u.a. auch der Antiproportionalität (Kl. 8)
- Erstreben eines "Verbindungskonzepts Schlußrechnen" unter funktionalen, proportionalen und isomorphen Gesichtspunkten (Kl. 9/10).

Es soll hier nicht verheimlicht werden, daß eine solche Zielsetzung den Abschied von vielen zur Gewohnheit (der Lehrbücher??) gewordenen Methoden bedeutet. Aber die empirischen Daten und die Lehreräußerungen sprechen hier eine unmißverständliche Sprache:

der funktionale und proportionale Zugang zum Schluß- und Sachrechnen blockieren das Grundverständnis so stark, daß - und hier vor allem in Realschule, Gesamtschule und Hauptschule - überhaupt kein dauerhafter Erwerb von Strategien (und damit verbundenem Verständnis) einsetzt.
Bei der zentralen Stellung dieses Gebiets - auch und gerade für das spätere Leben - kann dies nicht hingenommen werden.

Ein Hinweis für den Leser:

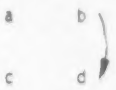
die folgenden Teilziel-Beschreibungen müssen im Kontext der anderen Abschnitte, insbesondere 9.1 (Proportion) / 9.3 (Funktion) / 9.6 (Sachrechnen) gelesen werden. Während des Lesens kann auch die Übersichtstafel 9.7 mit Nutzen herangezogen werden.

9.2.2 Didaktisch-methodische Bemerkungen

a) Zugang zum Schlußrechnen (Kl. 5/6/7)

Dieser Zugang über den Grundgedanken des "isomorphen Rechnens" ist - wie wir gesehen haben - eine natürliche Kontaktstelle zwischen Schülern und Mathematik. Im Mittelpunkt steht hierbei der "gleichartige Zusammenhang" in 2 (getrennten) Größenbereichen.

Es sollte Ziel des Unterrichts sein, die isomorphe "Schlußweise"



zu sichern, ihre (linearen) Strategien bewußt zu machen, ihre Anwendungskraft hervorzuheben und sie an geeigneten Stellen durch grafische Darstellungen zu ergänzen.

Es sollte nicht Ziel des Unterrichts sein,

funktionale Aspekte (sei es über Wertetabellen, Graphen, Paarmengen mit gleichen Quotienten/Produkten),

proportionale Aspekte (sei es über den relativen Verhältnisbegriff, über Verhältnisse, Verhältnisgleichheit etc.)

oder

algebraische Aspekte (sei es über Gleichungen, Grundgleichungen etc.)

auf dieser Lernstufe zum Grundverständnis des Schlußrechnens und/oder seiner Anwendungen (z.B. in der %- und Zinsrechnung) zu benützen. Allenfalls können diese Aspekte nach Erreichung des Grundverständnisses hinzukommen, aber auch hierbei sollte man sehr vorsichtig sein und nicht alle Schüler gleich behandeln.

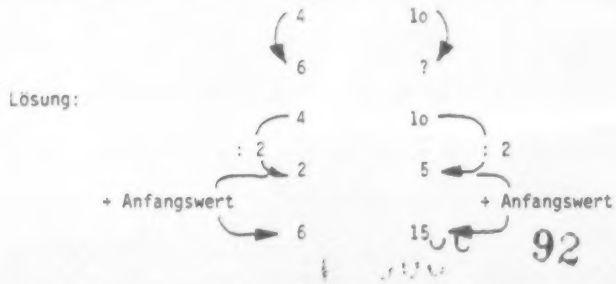
Im einzelnen lassen sich zum Einführen und gleichzeitigen Sichern des Schlußrechnens folgende unterrichtliche Vorschläge machen:

- an vielen numerisch einfachen Beispielen des Typs "je mehr/desto mehr" bzw. "je weniger/desto weniger" die Grundstrategie des "gleichartigen Zusammanhangs" darlegen. Dabei die Beispiele so mischen, daß eine Wahrnung vor unreflektierter Verwendung des Dreisatzmusters entsteht: einmal muß geklärt werden, daß "je mehr/desto mehr" nicht immer "malnehmen" heißt und dann, daß nicht jeder Zusammenhang diesem Muster folgt.
  Für den ersten Fall sind z.B. Aufgaben mit Mengenrabatt, für den 2. Fall Aufgaben wie "3 Eier brauchen ..." geeignet.
  Antiproportionale Aufgaben gehören überhaupt nicht in diesen Zusammenhang.
- nicht mehrere Lösungsverfahren gleichzeitig oder an einer Aufgabe, aber auch keine Normierung der Schlüsse (z.B. nicht immer "über 1").
- keine Gleichungsformungen, keine Wertetabellen, höchstens "Kurztabellen":

a	b
c	x

Weiter ist es wichtig, die Handlungsmuster und die Linearität ihrer Strategien bewußt zu machen:

- an numerisch einfachen Beispielen können Schlüsse über gT und Kopplungen mit additiven Strategien geklärt werden:



- durch numerisch kompliziertere Aufgaben entsteht der Zwang zu einer "Strategie über 1"
- durch mittelschwere Aufgabenketten (zu unterscheiden von Wertetabellen!!) werden die Schüler angeregt, alle Strategien bewußt einzusetzen.

Beispiel VERGNAUD [1980]

Das Beispiel stellt die Fahrt eines Zugs von Paris nach Bordeaux dar.

	distance (km)	duration (min.)
Paris		
	104	
Les Aubrais		
	52	
Blois		
	52	
St. Pierre		
	64	
Chatellerault		
	32	
Poitiers		
	64	
Ruffec		
	48	
Angouleme		
	88	
Coutras		
	16	6,4
Libourne		
	36	
Bordeaux		

An solchen Aufgaben läßt sich auch das Strategieverhalten des einzelnen Schülers erkennen - insbesondere, ob er schon funktionale/proportionale Strategien anwendet.
Eine für solche Diagnosen vielfach verwendete Aufgabenstellung ist die folgende:
der Lehrer malt "Herrn Klein" auf die Tafel, daneben 2 "Maßeinheiten", nämlich Ringe und Klammern. Herr Klein mißt vier Ringe bzw. 6 Klammern.(Man kann das auch mit dem Overheadprojektor demonstrieren).
Herr Klein hat einen Freund, Herrn Groß, der leider verhindert ist, selbst zu erscheinen. Er mißt sechs Ringe. Beide sind mit Herrn Riese befreundet, der 11 Ringe mißt. Wieviel Klammern benötigt man für Herrn Groß und Herrn Riese?

Es ist zweckmäßig, die Schüler die Antworten und die Überlegungen aufschreiben zu lassen. Hieraus ergeben sich wertvolle Hinweise für die weitere Arbeit mit den Schülern (als Hilfe für die Deutung der Schülerantworten: s. SUAREZ [1977]).

Die besondere Bedeutung der Schlußrechnung liegt in ihrer Anwendungsbreite; vgl. hierzu insbesondere 9.6.
An dieser Stelle soll auf die %- und Zinsrechnung eingegangen werden.

Für die %-Rechnung ergeben sich folgende Vorschläge:

- kein Zugang über relative Anteile, kein Aufstellen von Grundgleichungen, keine Erklärung des %-Begriffs über normierte Brüche, sondern das mit Hilfe der Schlußrechnung durchgeführte "Umrechnen auf 100".
  Besonders bewährt hat es sich, Merkmalverteilungen mit Schlußrechnen auf 100 umzurechnen und die umgerechneten Verteilungswerte als %-Anteile zu deuten (zu "definieren").

Beispiel:

	Jungen	Mädchen	Gesamt	
Anzahl	120	180	300	: 3
%	40	60	100	

Der Vorteil eines solchen Vorgehens liegt auch darin, daß es sich mit statistischen Übungen (Umfragen, Tabellen, Experimenten) verbinden läßt und sofort zu grafischen Darstellungen (Block- und Streifendiagramme) führt.

- Hieraus ergeben sich zwei Grunderkenntnisse, die gleichzeitig Grundansätze für alle weiteren Probleme sind:

  p % entspricht dem Prozentwert
  100 % entspricht dem Grundwert ($360^0 \triangleq 100\ \%$)

  Durch geschickten Einsatz dieser Grundansätze lassen sich alle Aufgaben der %-Rechnung mit Schlußrechnung lösen; insbesondere fügen sich hier die Kreisdiagramme ein.

Für "p % von k" lassen sich Kurz-Strategien entwickeln, insbesondere im Zusammenhang mit dem Taschenrechner. Die von Schülern entwickelten Strategien sind meist von folgendem Typ:

k	x	p	%		(vor allem "tastengläubige" Schüler)
k	x	p	:	100	(vor allem Schüler, die meinen, "%-Rechnen heißt durch 100 teilen")
k	:	100	x	p	(vor allem Schüler, die über 1 % gehen)

Bemerkung: für Berechnungen des Prozentsatzes sollte man nicht sagen "wieviel % sind 5 DM von 25 DM" sondern, "wieviel % sind 5 DM an 25 DM".

Für die Zinsrechnung ergeben sich aus diesen Vorschlägen einfache Folgerungen:

- im Zeitraum bis zu 1 Jahr gelten die Vorschläge der %-Rechnung analog;
- überschreitet man 1 Jahr, sollte - mit Taschenrechner - "von Jahr zu Jahr" weitergerechnet werden. Das Aufstellen der kip-Formel und Formelumstellungen ist wenig hilfreich.

Insgesamt ist es wichtig, alle in Klasse 5 - 7 ausgewiesenen Stellen der Lehrpläne für das Schlußrechnen und seine Anwendungen ausgiebig zu nutzen, vor allem mit realitätsnahen Beispielen (vgl. auch 9.6).

b) Versuch einer Erweiterung des Schlußrechnens (Kl. 8)

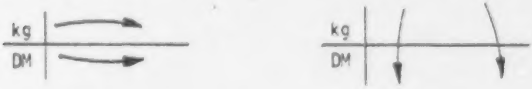
In Verbindung mit der Behandlung der linearen Funktion ist es zweckmäßig, Problemstellungen des isomorphen Schlußrechnens neu zu deuten und gleichzeitig den Kreis der Problemstellungen zu erweitern.

Die "neue" Deutung des isomorphen Schlußrechnens zielt vor allem auf die Generierung von Größenpaaren und die Abhängigkeit der 2. Größe im Paar von der 1. Größe.

- Hierzu sind Wertetabellen/Graphen angebracht und Aufgaben, die solche Wertetabellen/Graphen erzeugen. Viele Aufgaben der Schlußrechnung erzeugen keineswegs eine "Wertetafel", sondern nur ein neues Wertepaar.

Deshalb sind jetzt vor allem Meßreihen und angewandte Aufgaben (Tanksäule, Bewegungsvorgänge, Tarifaufgaben) nützlich.

- An den Wertetabellen muß primär eine "Umlenkung" der Blickrichtung erfolgen:



Vom isomorphen Schlußrechnen	zum funktionalen Schlußrechnen
Von 2 Größenbereichen	zum Bilden "gemischter" Größen

Diese Umlenkung kann vorsichtig am Graph mitvollzogen werden, indem Steigungsfaktoren als Quotienten gedeutet werden.
Bewährt hat es sich, vor allem Zuwächse $\triangle x$ und $\triangle y$ sowie deren Quotienten zu betrachten.
Es werden auch "Paar-Generierungs-Aufgaben" in Tabellenform (evtl. mit eingestreuten "falschen Paaren") empfohlen:

4	1o	5	3o	36	72
?	?	?	?	54	1oo

- Das in 9.3 dargestellte "Mausspiel" kann ebenfalls zur Verbindung von funktionalem Konzept und isomorphem Schlußrechnen verwendet werden.

Die Erweiterung des Kreises der Problemstellungen erstreckt sich vor allem auf die reziproke Funktion ("Antiproportionalität"). Die vorangegangenen Analysen haben klar ausgewiesen, daß sie vom isomorphen Schlußrechnen her praktisch unzugänglich ist. Daher wird hier der Vorschlag gemacht, sie vom funktionalen Gedanken her anzugehen:

- ein bewährter Zugang sind "gemischte Zordnungstabellen" samt Graphen.

Beispiel:

Arbeiter	Tage	Arbeitsleistung (z.B. m^2)

Hierbei wird je eine Größe invariant gehalten (und evtl. abgedeckt) bis alle Zuordnungen besprochen sind, anschließend verglichen (dasselbe mit den zugehörigen Graphen).

- diesen Zugang kann man durch "Schockeffekte" verstärken, indem man einfach eine "reziproke" Aufgabe rechnen läßt und die garantiert unterschiedlich ausfallenden Ergebnisse diskutiert.
- Ergänzt wird dies durch Angabe von Unterscheidungskriterien linearer und reziproker Probleme, durch das Sortieren solchermaßen gemischter Aufgabenmengen, durch das Selbst-Herstellen von Aufgaben etc.

Bezüglich des Erwerbs eines funktionalen Konzepts des Schlußrechnens, also des Konzepts der Proportionalität, durch die Schüler, darf der Lehrer keine übertriebenen Hoffnungen haben. Dies hängt mit den Problemen im Erwerb proportionalen Denkens und mit der Eigenart der Funktionsvorstellung beim Schüler (vgl. 9.3) zusammen.
Der Erwerb eines Verständnisses der Antiproportionalität und ihr zugeordneter Sachaufgaben erscheint mehr als fraglich.
Selbst bescheidene Erfolge auf diesem Felde sind nur erreichbar, wenn die hier dargestellten Aspekte 9.1 - 9.6 insgesamt beachtet werden. Einzelvorstöße oder punktuelle Behandlung weniger Aspekte bringen nichts ein.

c) Erstreben eines Verbindungskonzepts (Kl. 9/1o)

Das Lehrziel ist es jetzt, die Verbindung verschiedener mathematischer Vorstellungen zu erreichen:

- ein erster Ansatzpunkt bietet sich bei (Sach-)Textaufgaben zu Bruchgleichungen/Verhältnisgleichungen. Hier kann man etwa für die %-Rechnung eine "Grundgleichung" einführen, sie proportional deuten und mit ihr durch geeignetes Einsetzen und Auflösen alle

Fälle der %-Rechnung bearbeiten. Parallel dazu sollten funktionale Darstellungen (Wachstumskurven) verwendet werden.

- ein weiterer Ansatzpunkt liegt bei der Behandlung quadratischer und exponentieller Funktionen.
  Hier kann Zu- und Abnahme von Änderungsraten von Intervall zu Intervall berechnet werden, z.B.

$$\frac{a^{x+k}}{a^{x}} = \frac{a^{x+2k}}{a^{x+k}} = a^{k}$$

und dies verglichen werden mit der Zunahme/Abnahme von Funktionswerten, z.B.

$$a^{x} \xrightarrow{\cdot\, a^{k}} a^{x+k} \xrightarrow{\cdot\, a^{k}} a^{x+2k}$$

Auf diese Weise werden funktionale, proportionale und isomorphe Überlegungen gekoppelt.

Wieweit es gelingt, dem Schüler solche "Verbindungskonzepte" nahe zu bringen, ist eine noch weitgehend offene Frage, die - wie wir wissen - die empirische Unterrichtsforschung im hier betrachteten Fall eher skeptisch beurteilt.

9.3 Der Aspekt "Funktion" im Unterricht

9.3.1 Unterrichtsziele und ihre Legitimation

Die Idee der Funktion als Zuordnung und Abhängigkeit von Objekten ist ein zentraler Bestandteil der Mathematik mit großer Bedeutung in allen Anwendungsbereichen der Mathematik.
Das Funktionskonzept, welches Schüler erlangen, ist nach unseren empirischen Analysen auch ein eigener Vorstellungsbereich.

Im Zusammenhang mit proportionalen Themen, Themen der Schlußrechnung und deren Umkreis - worauf wir uns hier beschränken - spielt der funktionale Aspekt für Schüler aber nur eine sehr untergeordnete Rolle; er tritt vor allem als "Zusammenhang" und "gleichartige" bzw.

"ungleichartige" Veränderung von Größen in den Blick des Schülers; er kann dem Schüler auch zur Veranschaulichung solcher Zusammenhänge dienen.

Eine - mathematisch naheliegende - Überstrapazierung des funktionalen Gedankens ist im hier betrachteten Zusammenhang gefährlich:

relationstheoretische Zugänge zur Proportion, der Zuordnungsgedanke als Hauptgedanke für Sachaufgaben, Einführung in die Funktionslehre gekoppelt mit Einführung in die Schlußrechnung sind kritisch zu beurteilende methodische Ansätze.
Wie wir wissen, sind funktionale Lösungsstrategien für proportionale Probleme auch bei älteren Schülern noch relativ selten und fehleranfällig.

Der funktionale Aspekt kann im Zusammenhang mit proportionalen Themen und deren Umkreis nur dienenden Charakter haben; gleichzeitig kann er jedoch der schwierigen Anbindung der Antiproportionalität (vgl. 9.2.1) dienen und an ihr wesentlich deutlicher entfaltet werden als an der Proportionalität.

Betrachten wir die soeben gemachten Aussagen und die vorausgegangenen Analysen, so erhalten wir folgendes Haupt-Lehrziel:

- Entwicklung von Bereitschaft und Fähigkeiten beim Schüler, proportionale und antiproportionale Probleme als Probleme des Zusammenhangs von verschiedenen Größen zu sehen und zu lösen.

Unter Berücksichtigung der gemachten Beschränkungen und Einschränkungen kommen wir damit zu folgenden Teilzielen des Lehrens in altersgerecht gestufter Weise:

- Tabellarische und grafische Darstellung proportionaler und antiproportionaler Probleme, ihre Deutung als Zusammenhang und Veränderung verschiedener Größen; Benützung der Darstellungs- und Deutungsmöglichkeiten zur Problemlösung (Kl. 8)
- Versuch der Entwicklung (normierter) funktionaler Lösungsstrategien für proportionale und antiproportionale Probleme (Kl. 9/1o).

Hinweis für den Leser:

Das Fehlen funktionaler Lehrziele für Kl. 5/6/7 hier besagt nicht, daß solche Ziele dort nicht vorkommen sollen. Es bedeutet nur, daß funktionale Aspekte im hier betrachteten Zusammenhang erst ab Klasse 8 langsam erfaßbar werden.

Die bescheidenen funktionalen Zielsetzungen in Kl. 8 bzw. 9/10 beziehen sich ebenfalls nur auf Lernerwartungen im Zusammenhang proportionaler/antiproportionaler Fragestellungen.
Die allgemeine Frage der funktionalen Aspekte im Mathematiklernen der Sekundarstufe I überhaupt wird hier nicht ausführlich erörtert.

9.3.2 Didaktisch-methodische Bemerkungen

a) Funktionale Deutungen (Kl. 8)

Im Unterricht der Klasse 8 bietet sich im Bereich "Lineare Funktionen" die verführerische Möglichkeit, an umweltbezogenen proportionalen Problemen einzusteigen und von da aus "alles" zu entwickeln.
Die Praxis wird einem solchen Vorgehen i.A. große Enttäuschungen bereiten; die Gründe dafür sind im Vorausgehenden dargestellt.

- Ein erster grundlegender Schritt überhaupt ist die Entdeckung der "anderen" = funktionalen Seite an proportionalen Problemen, die naiv immer isomorph gesehen werden. In 9.2.2 wurde daher die "Umlenkung" der Blickrichtung in Wertetabellen als entscheidend betont. Nur so kann der kaum beachtete Zusammenhang verschiedener Größen zu einer funktionalen Beziehung ausgebaut werden.
Wertetabellen können hierbei als Suchreihen ausgebildet werden:

2	3	5	?
4	?	10	12

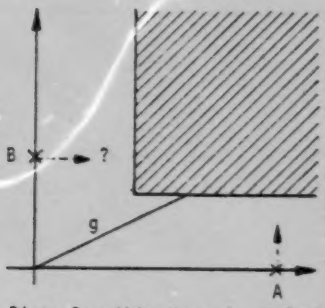
Die Schüler gehen dann von horizontalen Strategien zu vertikalen über und gewöhnen sich daran.
Antiproportionale Suchreihen führen stärker zur Umlenkung der Blickrichtung als proportionale Suchreihen.

Quadratische Suchreihen fördern bei den Schülern stärker Differenzbildungs-Strategien als proportionale und antiproportionale Suchreihen.
Der Lehrer kann also durch die Wahl der Suchreihen Strategien und Schwerpunkte genau gezielt fördern.

Es ist wichtig, bei den vertikalen Strategien den Schülern ihre selbstgefundenen Methoden vorerst zu belassen, sie auch nicht zu zwingen, diese zu verbalisieren. Ziel ist es, daß die Schüler Werte sicher ausrechnen können und einschlägige Aufgaben anhand solcher Suchreihen gut lösen können.

Der zweite Schritt ist die Darstellung von Wertetabellen im Koordinatensystem, also die Herstellung eines Graphen. Die Schwierigkeit dieses Schrittes für Schüler wird oft unterschätzt:

Zunächst sehen keineswegs alle Schüler die Achsen des Koordinatensystems als Zahlenstrahlen, sondern oft lediglich als Ansammlung von Strecken mit verschiedenen Längen und Lagen. Die Identifikation der Werte aus der Wertetabelle mit Punkten auf den Achsen muß daher bei vielen Schülern erst gesichert werden.
Eine gute Möglichkeit hierzu bietet der Grundgedanke des "Mausspiels" (SUAREZ/BIKER [1977]):



In einem Koordinatensystem, das teilweise abgedeckt wird, befindet sich eine Gerade g.
Zwei Mäuse A und B laufen auf Koordinatenlinien (s. Bild). Maus A wählt einen Standort A.
Die Schüler sollen angeben, von welchem Punkt der 2. Achse B starten muß, um Maus A auf g zu treffen.

Diese Grundidee kann in vielerlei spielerische Situationen gekleidet werden; sie fördert auch den funktionalen Aspekt des proportionalen Denkens.

Meist entsteht aus der Wertetafel eine Punktfolge, die von den Schülern sofort schön verbunden wird. Für die Schüler wird der Graph

sofort zum "Bild" mit ästhetischen Qualifikationen - für den Lehrer ist er aber ein "Diagramm" mit sachlogischen Informationen. Sprechweisen wie "die Punkte liegen auf einer Geraden", "die Punkte liegen nicht auf einer Geraden" etc. fangen das ästhetische Bedürfnis zunächst auf und lassen den Drang zum (evtl. stückweise) geradlinigen Verbinden abbremsen.

- Doch ein ganz entscheidender Punkt ist nun die Deutung des entstandenen Graphen.
Schülern im betrachteten Alter steht hierzu kein ausreichender mathematischer Ausdrucks- und Erfahrungsbereich zur Verfügung. Umso stärker deuten sie den Graphen bildlich-ästhetisch, nicht diagrammatisch- sachlogisch, denn "Bilder" haben sie schon oft gesehen und ästhetisch beschrieben.

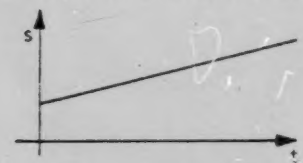
Es ist daher unerläßlich, an vielen Graphen und im Zusammenhang mit der Wertetafel Deutungen durchzuführen und die beiden Deutungsbereiche bildlich/diagrammatisch gegeneinander abzuheben.
Zwei Fragenbereiche bei grafischen Darstellungen sind also zu unterscheiden:

a) Wie sieht das Bild aus? (ästhetisch)

b) Was sagt das Bild? (sachlogisch)

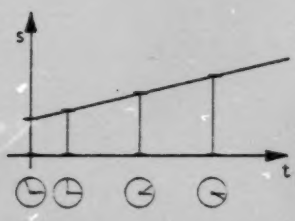
Im Falle b) geht es um den sachlogischen Inhalt, bei uns also um den Zusammenhang von Größen und ihre Veränderung. Gerade hier überfällt die Schüler immer wieder der bildliche Aspekt.

Beispiel: (Bewegungsvorgang)



Ist das der Fahrweg auf der Landkarte? (bildlichen Aspekt klären!)

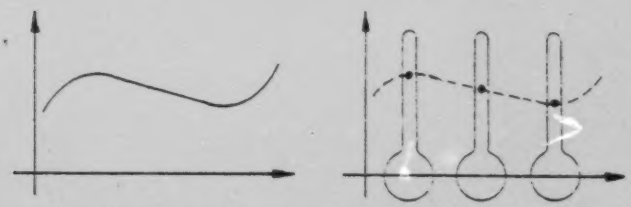
Was ist es dann? (sachlogische Fragestellung überhaupt bewußt machen)



Dieses Diagramm mit Uhren und Wegstrecker zeigt noch deutlicher den sachlogischen Kern:
Fahrstrecke und Zeit haben einen Zusammenhang und verändern sich (hier) gleichartig.

Es ist zweckmäßig und keine vertane Zeit, verschiedenartige Diagramme zu mischen und das Entnehmen sachlogischer Informationen daraus zu üben

z. B. eine Temperaturkurve so "umzeichnen" lassen:



Auch die Behandlung der verschiedensten statistischen Diagramme ist an dieser Stelle unverzichtbar. Es soll dabei allerdings nicht um die Konstruktion, sondern um das Lesen dieser Grafiken gehen.

Hilfreich ist auch die Zuordnung verschiedener Darstellungen desselben Problems. Man gebe z.B. 1o Wertetabellen und 1o Graphen vor. Was gehört zueinander?

- Erst wenn Schüler diagrammatisch-sachlogische Deutungen von Graphen gewöhnt sind, können die darauf bezogenen mathematischen Beschreibungen (z.B. Steigung, 2. Achsenabschnitt etc.) von Graphen angegangen werden.

Der 2. Achsenabschnitt wird über Aufgaben mit Sockelbeträgen (z.B. Stromtarif) i.A. gut verstanden.

Phänomen und Begriff der "Steigung" sind aus den hier immer wieder dargelegten Gründen im Zusammenhang der Proportionalität äußerst schwierig. Sie setzen primär ein Denken in Differenzen und Quotienten von Differenzen sowie die Konzeption der Proportion (i.S. von Quotientengleichheit) voraus.
Der Erwerb eines Steigungskonzepts (linearer Funktion und anderer) dürfte daher in Klasse 8, aber auch später, nur für einen ganz kleinen Teil der Schüler möglich sein.
Das Denken in Differenzen als Grundlage läßt sich aber fördern. Geeignet hierzu sind reziproke (antiproportionale) und quadratische Wertetafeln einerseits und proportionale Wertetafeln andererseits. Antiproportionale und quadratische Beispiele reizen Schüler erfahrungsgemäß, überhaupt Differenzenbetrachtungen anzustellen - vor

allem, wenn sie als Suchreihen ausgebildet sind. Außerdem sind sie gute Gegenbeispiele, die die Eigenart der Proportionalität (konstante Steigung) erst mal über die Reizschwelle transportieren.

- Alles, was tabellarische und grafische Darstellung sowie diagrammatische Deutung von Graphen in Richtung algebraischer Formalisierung überschreitet, ist für Schüler der Klasse 8 sehr schwierig (auch noch in Klasse 9/1o).
  Dies gilt für funktionale Schreibweisen ($f(x)$, $x \longrightarrow f(x)$, $y = f(x)$ etc.) ebenso wie für die Fassung der vorgegebenen Zusammenhängen in Abbildungsvorschriften oder die Deutung von Abbildungsvorschriften.

  Um die Bedeutung und den Ernst dieser Aussagen nicht zu verwischen, wird auf methodisch-didaktische Hinweise zu diesem Punkt verzichtet.

b) Entwicklung funktionaler Lösungsstrategien für proportionale und antiproportionale Probleme (Kl. 9/1o)

Die Legitimation dieses Teil-Lehrziels ist, wie mehrfach erwähnt, relativ unsicher, zumal die Erlernbarkeit für einen großen Teil der Schüler in Frage steht.

Vor allem im Gymnasium, z.T. in der Relschule, kaum in der Hauptschule, konzentriert sich der Unterricht in Klasse 9/1o im funktionalen Bereich auf Erstellen von Abbildungsvorschriften, Kennzeichnen von Graphen etc. Oblicherweise stehen dabei nicht-lineare Funktionen im Vordergrund.

- Es ist zwechmäßig, diesen Funktionen nachträglich nochmals die lineare Funktion gegenüberzustellen und ihre Eigenschaften (z.B. konstanter Differenzenquotient und konstanter additiver Zuwachs) herauszuarbeiten, insbesondere im Vergleich mit exp. (z.B. konstanter Funktionswertquotient bei gleicher Schrittlänge und konstanter multiplikativer Zuwachs) und quadratischen Funktionen.

- Dann kann es sinnvoll sein, auf Arbeitsblättern verschiedene Sachsituationen (z.B. Menge-Preis-Problem und Wachstumsprobleme exponentieller oder quadratischer Art) sowie verschiedene Abbildungsvorschriften vorzugeben - evtl. auch noch Graphen - und diese gegenseitig zuordnen zu lassen.
An den beiden Wachstumstypen linear/exponentiell können dann die Handlungsmuster für das Lösen einschlägiger Probleme erörtert werden,

z.B.:

linear	Handlungsmuster	exponentiell
b	Anfangswert bestimmen	a
	↓	
m	Zuwachsrate bestimmen	k
	↓	
$m \cdot x$	Geg. x-Wert mit Zuwachsrate verarbeiten	k^x
	↓	
$y = mx + b$	Noch Anfangswert berücksichtigen und so y-Wert bestimmen	$y = a \cdot k^x$

- Die Betrachtung proportionaler und antiproportionaler Probleme kann unter algebraischen Gesichtspunkten verbindend erfolgen. Man nehme die Gleichung

$$z = x \cdot y$$

und deute sie einmal bei festem y, dann bei festem z.

- Es ist theoretisch möglich und schlüssig, statistische Verteilungen funktional zu deuten. Bei den bereits betonten Problemen und dem hohen Abstraktionsgrad solcher Vorstellungen ist aber zu empfehlen, einen expliziten fuktionalen Verteilungsbegriff der Sekundarstufe II vorzubehalten.

9.4 Der Aspekt "Ähnlichkeit(sgeometrie)" im Unterricht

9.4.1 Unterrichtsziele und ihre Legitimation

Wie aus unseren Analysen hervorgeht, kann von einer eigentlichen Erfassung des Problems der Ähnlichkeit unter Einbezug figuraler und proportionaler Aspekte erst bei älteren Schülern gesprochen werden.

Dabei spielt der proportionale Gedanke allerdings nicht die entscheidende Rolle, sondern offensichtlich die "Form-Erfassung". Typische Phänomene des Geometrie-Lernens - Figurenanalyse und Figurenreproduktion - kommen hinzu.
Es besteht die Chance - aber nur, wenn ein Grundverständnis von "Form" da ist - bei den Schülern durch Ähnlichkeitsgeometrie die Bereitschaft zur Verwendung von Proportionen zu fördern; eine eigentliche Entwicklung proportionalen Denkens durch Ähnlichkeitsgeometrie ist wenig wahrscheinlich.

Für diese Bereitschaft zur Verwendung proportionalen Denkens ist es allerdings notwendig, den inner- und außermathematischen Verwendungsbereich der Ähnlichkeitsvorstellung aufzuzeigen.
Ohne genügend Zeit für Anwendungen der Strahlensätze, Ähnlichkeitssätze, Trigonometrie in Technik/Vermessung etc. werden auch Formvorstellung, Figurenanalyse und Figurenreproduktion nicht erreicht. Dann ist es besser, auf Ähnlichkeitsgeometrie und Trigonometrie ganz zu verzichten.

Aus diesen Überlegungen heraus erscheint folgendes Lehrziel legitimiert:

- Entwicklung einer "Formvorstellung" für Figuren, genannt "Ähnlichkeit", Entdecken und Verwenden proportionaler Aspekte an ähnlichen Figuren - vor allem im Rahmen ausgedehnter Anwendungsprobleme.

9.4.2 Didaktisch-methodische Bemerkungen

Die folgenden Hinweise beziehen sich vor allem auf die Klassen 9/1o. Die diesen Klassen vorangehende geometrische Förderung des proportionalen Denkens ist bereits in 9.1.2 dargestellt worden.

Wie eine Zusammenschau vorliegender Erfahrungsberichte nahelegt, sollten beim unterrichtlichen Vorgehen verschiedene Phasen unterschieden werden:

1) Sensibilisieren

Das Herausbilden einer Formvorstellung ist möglich, wenn der Schüler zwischen "verzerrten" und "unverzerrten" Darstellungen einer Figur unterscheiden lernt - ohne zunächst eine schlüssige Begründung hierfür anzugeben. Dies kann durch Projektion verschiedenster Art, durch Vorlage von Bildern, Photos usw. erreicht werden.
Man wird dann eine unverzerrte Wiedergabe "ähnlich" zum Original nennen.
Es ist unerläßlich, den Alltagssprachgebrauch von "ähnlich" bewußt gegen den jetzt gewählten Begriffssinn abzugrenzen.

2) Figurenmengen begründet klassifizieren

Es ist nun möglich, auf Arbeitsblättern/Folien Figurenmengen vorzulegen, die Paare ähnlicher und nichtähnlicher Figuren (nicht nur Dreiecke!) enthalten.
Das Herausfinden solcher Paare soll nun begründet erfolgen: warum sind die Paare ähnlich?
Um den Stand der Schüler im jetzt anlaufenden engeren Begriffsbildungsprozeß zu erkennen, ist es zweckmäßig, die Figurenmengen so aufzubauen und zu zeichnen, daß ähnliche Paare herausgefunden werden können durch

- Parallelitätsbetrachtungen allein
- Winkelbetrachtungen allein
- Winkelbetrachtungen und Erkennen einfacher Seitenverhältnisse (1 : 2)

- Winkelbetrachtungen und Erkennen schwierigerer Seitenverhältnisse

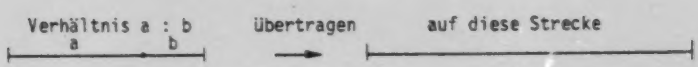
(Diese 4 Strategien bilden gleichzeitig eine aufsteigende Schwierigkeitsskala.)

Vergleich und Diskussion der von den Schülern angewandten Strategien gibt nicht nur Kenntnis über den Stand der Begriffsbildung, sondern fachlich auch die Möglichkeit, "Ähnlichkeit" von Vielecken zu definieren (und daraus abstammend - wenn man will - "Ähnlichkeitsabbildung").

3) Zeichnen ähnlicher Figuren

Aus den in 2) bewußt gewordenen Strategien zum Herausfinden ähnlicher Figurenpaare ergeben sich zwar mathematisch gesehen unmittelbar Konstruktionsverfahren; aber im Lernvorgang läuft das nicht so glatt:

- Die Erzeugung ähnlicher Dreiecke durch Parallelenziehen bzw. Winkelgleichheit ist relativ unproblematisch;
- die Erzeugung ähnlicher Figuren unter Benützung von Proportions-Übertragungen ist für viele Schüler ziemlich schwierig, denn hierfür muß ein explizites externes Proportionsverständnis (im Sinne von Verhältnisgleichheit) vorhanden sein; die Proportion in der zu konstruierenden Figur bezieht sich ja auf ein anderes "Grundmaß"!
  Die Übertragung von Proportionen muß wohl eigens geübt werden, am besten zuerst an Strecken:



Dabei sollten die Übertragungsstrategien nicht vorgeschrieben werden (z.B. "nach Strahlensatz 1" o.ä.); der auftretende Hauptfehler ist, daß die Schüler die Distanz b zum rechten Streckenende auf der neuen Strecke kongruent eintragen.

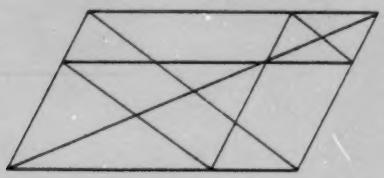
4) Problemlösung mit Hilfe von Ähnlichkeit

Hierunter fallen z.B. Aufgaben zur Anwendung der Strahlensätze, Herleitungen des Höhensatzes, Vermessungsaufgaben etc.
Immer wieder - und das ist überhaupt typisch für die Geometrie in der Schule - wird der Lehrer enttäuscht sein, wie wenig die Schüler bei der Stellung eines solchen Problems ihre geometrischen Sätze und Algorithmen "spontan" einsetzen - obwohl sie diese durchaus "können".

Dies hat u.a. den Grund, daß sich für den Schüler zuerst Figuren in den Vordergrund schieben, die er noch gar nicht analysiert, geschweige denn sich an ihnen passend zum Problem orientiert hat. Für beides braucht er erst mal Zeit und der Lehrer muß davon wissen.

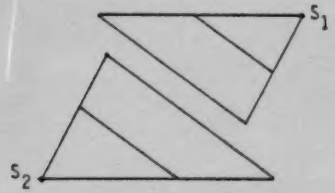
Beispiel:

(1) Analyse

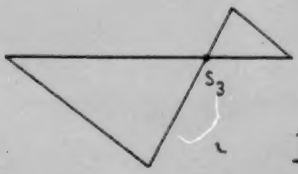


Was ist das?
Woraus besteht es?
.....
(Wir nehmen an, die Diskussion laufe auf das Stichwort "Strahlensatzfigur" zu)

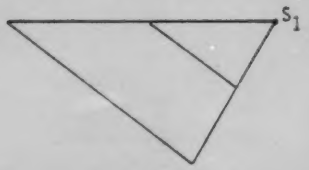
(2) Orientierung



Wenn es eine Strahlensatzfigur ist, wo kann dann der Scheitel liegen?
Wo die Parallelen?
.....



(3) Algorithmische Phase



Nun setzen wir den Strahlensatz 1 ein bez. Scheitel 1 und lesen ab .....

5) Anwendungsaufgaben

Wie zu Beginn gesagt - erst breite Anwendungen legitimieren dieses Unterrichtsgebiet "Ähnlichkeit".
In Schulbüchern finden sich viele Aufgaben dazu, auch Anregungen zu praktischen Übungen, die man unbedingt aufgreifen sollte (Freilandvermessung z.B., Kartenübungen usw.).
Ergänzend sei auf zwei Zeitschriftenbeiträge hingewiesen:

- Wöckel, H.: Die Strahlensätze und ihre Anwendung. Ehrenwirth Hauptschulmagazin 1980/10, S. 51 - 54.
  Anhand des Problems einer Fassadengestaltung werden Gesichtspunkte der Ähnlichkeit mit Wertetabellen und Schlußrechnungen verbunden.

- Manceau, Jean-Pierre: Proportionalité sur du papier.
  Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathematiques, Avril 1979, S. 209 - 218.
  Der Beitrag ist eine Darstellung von Aufgabenfolgen zur Verbindung des Proportionalitätsgedankens mit geometrischen Darstellungen (Wertetafeln und Versuche mit Papierflächen); hierbei wird die Ähnlichkeitsvorstellung einbezogen und es werden Wege zu trigonometrischen Deutungen der Versuche gezeigt.

Die Anwendungsaufgaben im Bereich der Ähnlichkeitsgeometrie - vor allem Maßstabs- und Vermessungsprobleme - fördern gewissermaßen "nebenbei" die Fähigkeit des Schülers zur figürlichen Reproduktion, indem er sich verkleinerte oder vergrößerte Bilder von Konfigurationen herstellen muß (Werkstücke, Geländer usw.).
Die Fähigkeit, sich Konfigurationen, die "man mal" gesehen hat, schnell und bis auf Unwesentlichkeiten wiederzubeschaffen, ist sowohl unterrichtlich wie allgemein von enormer Bedeutung.

9.5 Der Aspekt "Brüche" im Unterricht

9.5.1 Unterrichtsziele und ihre Legitimation

Die tiefgreifenden und weitverzweigten Vermittlungs- und Verstehensprobleme der Bruchrechnung, die in den vorausgegangenen Analysen aufgezeigt wurden, machen es auf die Dauer notwendig, größere Veränderungen im Lehrstoff und seiner zeitlichen Verteilung vorzunehmen.

Dies kann hier jedoch nur am Rande erwähnt werden. Für den aktuellen Unterricht und die in diesem Papier anstehenden Gesichtspunkte der Proportion erhebt sich die Frage nach konkreten Unterrichtszielen in der bestehenden Situation.

Wir stützen uns dazu auf die vorangegangenen Analysen:

a) Vergegenwärtigen wir uns, daß ein verständiges Hinausgehen über das Rechnen mit einfachen Brüchen wesentlich davon abhängt, wieweit der Schüler Zugriff zu äquivalenten Bruchdarstellungen hat und wieweit ihm klar ist, daß diese Äquivalenz die Eigenart von Brüchen ausmacht.
Dann wird er bei Additions- und Subtraktionsproblemen nicht auf Plausibilitäten (z.B. "Zähler und Nenner sind gleich zu behandeln") zurückgreifen, sondern Normstrategien anwenden.

b) Neben der Äquivalenzvorstellung ist das zweite Phänomen die Zahlvorstellung: Brüche, dargestellt durch zwei Zahlen, sind eine Zahl. Diese Zahl kann auch die Form eines Verhältnisses, eines Quotienten, einer Kommaschreibweise usw. annehmen.
Diese Vorstellung eröffnet vermutlich überhaupt erst einen Zugang zur Multiplikation und Division von Brüchen und das Gefühl dafür, daß es beim Bruchrechnen um Rechnen mit Zahlen und nicht um geschicktes Manipulieren mit 4 Positionen geht.

Unsere derzeitigen empirischen Kenntnisse lassen damit die Aussage zu, daß Äquivalenz- und Zahlvorstellungen entscheidenden Anteil am vernünftigen und dauerhaft sicheren Gebrauch der Bruchrechnung haben.

Das Bruchrechnen läßt sich somit nur im Verbund mit der Entwicklung proportionalen Denkens vernünftig realisieren. Gerade wegen dieser engen Verbindung muß man aber mit wesentlich kleineren Fortschritten, längeren Zeiträumen und einer geringeren End-Verständnis-Quote rechnen als seither (immer wieder aufs Neue, mit jedem neuen didaktischen Modell) gehofft.

Ist Bruchrechnen überhaupt legitimiert? Diese Frage hört man immer wieder; oft wird sie auch durch die Resignation vor den übergroßen Schwierigkeiten in diesem Bereich erzeugt.
Bruchrechnen ist sicher legitimiert durch die Möglichkeit, am Beispiel des Bruches und seiner vielen Darstellungen exemplarisch zu einer Vorstellung davon zu gelangen, was eigentlich eine "Zahl" ist.
Bruchrechnen ist auch legitimiert durch seine Bedeutung bei der Praxis der Algebra.
Bruchrechnen ist (zumindest heute) weniger legitimiert durch anwendungsbezogene Argumente.

Diese Überlegungen zur Legitimation wie die vorangegangenen zur Lernbarkeit legen es nahe, das Bruchrechnen auf seine wesentlichen Verwendungsaspekte zu beschränken und gleichzeitig in engem Zusammenhang mit anderen zahlenbezogenen Gebieten - z.B. der Proportionsrechnung - zu sehen.

So gelangen wir zu folgendem Haupt-Lehrziel:

- Im Verbund mit der Entwicklung proportionalen Denkens zu einem besseren Verständnis äquivalenter Brüche gelangen und so die Regeln des Anordnens, Addierens und Subtrahierens sicherer anwenden; gleizeitig den Bruch auch in der proportionalen Gestalt kennenlernen und so - zusammen mit anderen Bruchdarstellungen - der Vorstellung der (positiven) rationalen Zahl näherkommen.

Altersgerecht gestufte Teil-Lehrziele können unter Berücksichtigung der in 9.1 gemachten Stufung gefunden werden, wobei neue eigene Aspekte hinzukommen:

- Förderung des Denkens in "gleichwertigen Bruchdarstellungen" (Kl. 6)
- Erneutes Bruchrechnen unter stärkerer Berücksichtigung von Äquivalenzgesichtspunkten (vorwiegend Kl. 8)
- Einbeziehung des Bruchrechnens in die Bildung einer Vorstellung von "Zahl" (Kl. 9/10).

9.5.2 Didaktisch-methodische Bemerkungen

a) Förderung "gleichwertiger Bruchdarstellungen" (Kl. 6)

Diese Zielsetzung könnte dazu veranlassen, die Brüche mit Äquivalenzklassen einzuführen und, um dies einfacher zu machen, den Grundgedanken an elementaren Brüchen - z.B. 1/2 = 2/4 = 4/8 - zu erläutern.

Ein solches Vorgehen würde aber zunächst gegen den Grundsatz verstoßen, daß Rechenmethoden mit der Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kind in Übereinstimmung zu bringen sind.
Das Kind faßt in diesem Alter - wie wir gezeigt haben - natürliche Zahlen, elementare Brüche und einige Dezimalzahlen als einheitlichen, vertrauten Zahlenbereich auf.
Für die Auffassung eines beliebigen Zahlenpaares als ein Objekt ("Kunstbruch") - was ja z.B. überhaupt die Voraussetzung für das Setzen von Gleichheitszeichen zwischen Brüchen ist - fehlt jede Grundlage.
Dazu kommt die Tatsache, daß Brüche für den Schüler primär Verteilungs-Vorgänge beschreiben und nicht Verteilungs-Ergebnisse sind.

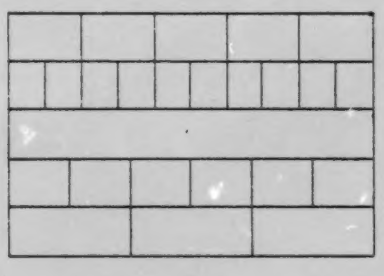
Das Anbinden an die elementaren Brüche und das Umgehen mit ihnen z.B. in Klasse 5 bringt daher nichts an transferierbarem Wissen für die Kunstbrüche. Auch die Überdehnung erster Erfahrungen mit Bruch-Situationen in Richtung Zahlencharakter ist nicht möglich.

Mann kann jedoch folgendes sinnvoll tun:

- Betrachten von verschiedenen Verteilungs-Situationen und Auswahl-Situationen (vgl. 9.1.2), die je unter sich "gleich" bzw. "ungleich" sind.
  Vor allem bei Auswahl-Situationen geht das gut:

Bezüglich der Chancen, weiß zu ziehen, sind folgende Situationen gleich: (2s/3w), (4s/6w), ...
Entscheidend ist dabei die Erfassung der Gleichheit bzw. Ungleichheit, nicht unbedingt, wie groß die Chance "nun genau" ist und welche Rechentricks dabei gelten.

- Aus mehreren Streifen gleicher Breite, aber verschiedener Länge und Farbe, durch Kombinieren möglichst viele "Farben-Verhältnisse" bauen.
- "Bruchkarten" herstellen (vor allem für Brüche kleiner 1) und beschriften:



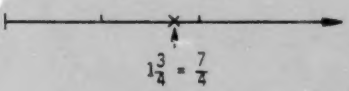
Sie fördern den Zugriff zur jeweiligen Bruchklasse und versuchen, von der Verteilungs-Situation zur Zahlenstrahlvorstellung überzugehen, wo der Bruch als Punkt-Objekt dargestellt ist.

- Intensives Üben von Kürzen und Erweitern, Addieren und Subtrahieren unter Rückgriff auf die vorangehend erwähnten figürlichen Methoden. Darüber hinausgehende algorithmische Verfahren (z.B. systematische Primfaktorzerlegung) sollten vermieden werden; sie arbeiten auf einer Darstellungs- und Verständnisebene von "Bruch", die noch gar nicht vorhanden ist.
- Beim Addieren und Subtrahieren kann der Zwang zum Rückgriff auf "gleichwertige" Bruchdarstellungen erhöht werden, wenn man den gemeinsamen Bruchstrich bei der Rechnung grundsätzlich vermeidet:

NICHT: $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} =$ _____ ; das führt zu: $\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{3}{10}$

Die Erwartungen an sicheres und gewandtes Handhaben der Bruchrechnung in Klasse 6 müssen gedämpft werden. Je höher diese Erwartungen und die ihnen entsprechenden Ansprüche an die Schüler sind, umso geringer ist der Erfolg.
Die Schüler befinden sich zur großen Mehrheit noch in der konkreten Phase. Daher findet die Loslösung der Bruchvorstellung von der Brucherzeugung nur bei einer kleinen Minderheit statt. Es ist gefährlich, sich in Klasse 6 an dieser zu orientieren, doch sollte der Lehrer zu erkennen versuchen, um welche Schüler es sich hierbei handelt.
Eine gute Gelegenheit dazu bietet die Behandlung von Brüchen > 1 und die Darstellung der Brüche am Zahlenstrahl.
Den ersten Fall, Brüche > 1, kann im eigentlichen Sinne nur verstehen, wer sich von der Verteilungs- oder Auswahl-Situation in Richtung "Bruch als zahlenmäßiges Ergebnis einer Division" und/oder "Bruch als Summe von Brüchen" gelöst hat.
Die Darstellung am Zahlenstrahl kann nur sicher geleistet werden, wenn der Bruch als "angeordneter Punkt" (= Zahl in einer Kette) erfaßt wird:

Der Schüler, der so markiert, hängt noch an der Verteilungs-Situation und betrachtet die Strecke von 1 nach 2 als Gesamtheit.



Der Schüler, der so markiert, erfaßt Brüche als angeordnete Objekte und berücksichtigt die 0-1-Normierung des Zahlenstrahls.

b) Erneutes Bruchrechnen (Kl. 7/8)

Der Leser wird zunächst den fachlich naheliegenden Hinweis auf die Schlußrechnung als Eldorado der Bruch-Anwendung vermissen. Ein solcher Hinweis verbietet sich aber durch die vorangegangenen Analysen und insbesondere im Blick auf den Abschnitt 9.2: Die Schlußrechnung

in Klasse 7/8 ist dort als eine isomorphe Tätigkeit des gleichartigen Rechnens (Dividieren, Multiplizieren, ggf. Addieren) dargestellt; i.A. werden die dezimalen (Näherungs-)Ergebnisse wesentlich sein.

Eine wesentlich höhere Bedeutung kommt - wie in 9.1.2 dargestellt - der Ausbildung externer Verhältnisse und hier insbesondere der "Chance" oder "Wahrscheinlichkeit" als Zahl zu.

Diese Zahlenvorstellung kann dann in Klasse 8 besonders gepflegt werden:

- durch die Einführung rationaler Zahlen (zunächst ohne Brüche!) und des Rechnens mit ihnen wird das Zahlengefühl des Schülers verstärkt;
- durch das (erneute) anschließende und intensive Rechnen mit positiven und negativen Brüchen wird dem Schüler klarer, daß es sich bei den Brüchen um Zahlen mit bestimmten, nicht einfach plausibel erklärbaren Regeln handelt.

Man beachte, daß die Einsicht der Schüler in die elementaren Äquivalenzumformungen von Aussageformen, insbesondere

$$ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad cax = cb \qquad (c \neq 0)$$

nur entstehen kann, wenn sie eine Äquivalenzvorstellung von Brüchen haben, insbesondere

$$b : a = cb : ca.$$

Daher hängt auch hier (fast) alles von der Pflege externer Verhältnisvorstellungen ab, wie in 9.1.2 erwähnt.

Aus all diesen Gründen sollte dem Einstieg in die Algebra ein weitgehend variablenfreies, konkretes Rechen- und Zahlenkapitel "rationale Zahlen" vorangestellt werden, in dem man - soweit überhaupt möglich - Äquivalenz- und Zahlvorstellung fördert.

c) Einbezug der Bruchrechnung (Kl. 9/10)

Auch wenn man davon ausgeht, daß die für die Klassen 6 - 8 beschriebenen Aktivitäten durchgeführt worden sind, kann nach unseren Analysen nicht erwartet werden, daß die große Mehrheit der Schüler ein-

wandfrei bruchrechnen kann. Dies hängt mit den früher erwähnten Problemen beim Erwerb einer Vorstellung der (positiven) rationalen Zahl zusammen.
Es ist daher Aufgabe in den letzten Klassen der Sekundarstufe I, zu versuchen, beim Erwerb einer solchen Zahlenvorstellung einen Schritt weiter zu kommen. Vor allem die Verbindung von Bruch- und Verhältnisrechnen ist dabei bedeutsam.
Die wichtigsten Bemerkungen hierzu befinden sich in 9.1.2. Dem sei nur folgendes hinzugefügt:

- Eine bloße Wiederholung der Bruchrechnung in Form regelhaften Drills bringt überhaupt nichts.
- Wichtige Beispiele von unterrichtlichen Leitfragen sind dagegen u.a.:
  - -- Was ist a : b? Wie kann man das deuten, ausrechnen, schreiben?
  - -- Ist eine Dezimalzahl ein Bruch (und umgekehrt)?
  - -- Warum ist a : b = ka : kb? Wie kann man das veranschaulichen?
  - -- Warum ist $\sqrt{2}$ kein Bruch?
  - -- "Multiplizieren macht größer, Dividieren kleiner"?
  - -- "Addieren macht größer, Subtrahieren kleiner"?
  - -- "Potenzieren macht größer, Radizieren kleiner"?

All diese Fragen zielen auf den Verbund der bis jetzt erworbenen Vorstellungen im Umgang mit Zahlen. So wird mit dem Schüler ein großer Zahlenbereich, nämlich $\mathbb{Q}$, erkundet und - auch in Abgrenzung gegen irrationale Wurzeln - sichtbar.
Ziele der Zahlbereichserweiterung oder der Strukturenlehre sind hiermit nicht erfaßt; zu diesen Problemen wird u.a. das nächste Heft von DID-M Stellung nehmen und Daten liefern.

9.6 Der Aspekt "Textaufgaben/Sachrechnen" im Unterricht

9.6.1 Unterrichtsziele und ihre Legitimation

Daß der Bereich "Textaufgaben/Sachrechnen" pädagogisch und im Blick auf seine allgemeine Bedeutung wichtig ist, steht außer Zweifel. An Legitimation ist also kein Mangel.
Wir wissen auch ziemlich viel über Problembereiche und Verhaltensmuster von Schülern in diesem Gebiet: die Angst vor dem Textproblem, die Reduzierung des Textes auf Signalpassagen, das oft impulsiv-naive Verbinden mit mathematischen Operationen und die dann daraus resultierenden rechnerischen Strategien.
Wir kennen auch eine Reihe von Faktoren, die das Verhalten gegenüber Textproblemen stark beeinflussen, z.B. das Erfahrungsfeld des Schülers und vor allem seine "Meta-Fähigkeiten", nämlich das, was er schon weiß, mit den gegebenen Informationen in Zusammenhang zu bringen und daraus passende Aktionen zu entwickeln.

Viele unserer Kenntnisse sind aber noch unzureichend und wir sind ein gutes Stück davon entfernt, breit gesicherte Erfahrungen über Wege zum Abbau der aufgezeigten Problembereiche und zur Förderung der ausgewiesenen Faktoren in Büchern nachlesen zu können.
Aber eine ganze Reihe von Phänomenen, die wir kennen, werden deutlicher und verstehbarer:

- die Beherrschung von Verhältnisrechnung, Schlußrechnung, Bruchrechnung etc. ist ein mathematisches Wissen, das für die Lösung eines Textproblems keineswegs hinreicht;
- die "brutal" auf mathematiknahe Informationen zurückgeschnittene Textaufgabe - z.B.:

  2 kg Wurst kosten 3 DM
  Wieviel kg kosten 5 DM? -

  bringt kaum einen der oben angesprochenen Problembereiche und Faktoren ins Spiel.

Damit wird deutlich, daß die üblichen eingekleideten Dreisatzaufgaben zwar Rechentechniken drillartig festigen können, aber zur textbezogenen Informationsgewinnung und -verarbeitung wenig beitragen.

Gleichzeitig sehen wir, daß dem Gesichtspunkt der Informationsgewinnung und -verarbeitung im Rahmen des Unterrichts große Aufmerksamkeit gewidmet werden muß und sich dies nicht im Vorbeigehen erledigen läßt (In Zukunft werden die Lehrpläne diesem Gebiet zu Lasten anderer viel mehr Raum geben müssen).
Dies bedeutet gleichzeitig, daß Probleme nicht nur textlich dargeboten werden sollen, sondern auch durch bildliche Darstellungen und vor allem durch reale Situationen.

Wir können damit folgendes Haupt-Lehrziel formulieren:

- Aus geeigneten Problemsituationen (real, textlich, bildlich) Informationen so gewinnen und verarbeiten, daß sich sinnvolle Fragen und Lösungen der Aufgabenstellung ergeben. Hierbei besonders die geeignete Wahl der mathematischen Methoden pflegen.

Was sich im Laufe der Schulzeit verändert, ist das Erfahrungsfeld der Schüler und der Umfang des verfügbaren mathematischen Wissens. Was sich offensichtlich weniger verändert, sind die grundsätzlichen Verhaltensweisen gegenüber Textaufgaben und Problemsituationen.
Es erscheint daher zweckmäßig, auf jeder Altersstufe das o.g. Haupt-Lehrziel beizubehalten, jedoch die Aufgabenstellungen dem Erfahrungsfeld und dem Umfang der verfügbaren mathematischen Methoden anzupassen.

9.6.2 Didaktisch-methodische Bemerkungen

Möglichkeiten zum Einbezug von Problemsituationen (inner- und außermathematisch) sind in den vorangegangenen Abschnitten mehrfach erörtert worden. Dies soll hier nicht wiederholt werden.

Oberblickt man die vorliegenden Erfahrungswerte zum unterrichtlichen Umgang mit Textaufgaben, vor allem im Zusammenhang mit Sachproblemen, so ergeben sich zunächst zwei miteinander eng verbundene Bereiche: Hinweise für Unterrichtsstrategien und Forderungen an die Gestalt von Textaufgaben und einschlägigen Sachproblemen.
Der Leser erwartet noch ein Drittes: wo finde ich dementsprechende Materialien?

Hinweise für Unterrichtsstrategien

a) Das Problem, überhaupt einen Anfang zu finden, steht im Vordergrund. Es hängt stark mit der Art der Aufgabe zusammen (s.u.).
"Meier, lies die Aufgabe vor ... Gut gelesen. Müller, lies nochmals den Fragesatz - aber langsam und deutlich ... Habt ihr es alle verstanden? Gut. Wie lösen wir nun die Aufgabe?"
Alle Erfahrungswerte sprechen dagegen, mit dem Vorlesen, mit einer Frage und insbesondere mit dem sofortigen Lösen der Aufgabe zu beginnen.
Auch die naheliegende Idee, z.B. eine Sachaufgabe auf einem Arbeitsblatt aufzuschreiben und dort die Lösung schon beginnen (z.B. durch den Anfang eines Rechenbaums etc.), um einen Startimpuls zu geben, ist daher kritisch zu beurteilen.

Die meisten positiven Erfahrungen werden bei einem offenen Einstieg gemeldet. Es wird eine Situation (textlich, bildlich oder real) gegeben, ohne Frage oder ohne "genaue" Frage. Diese Situation soll dann erst mal durch Schüler wiedergegeben werden - so, wie sie sie auffassen und in eigenen Worten; die Situation kann auch "personifiziert" werden (also auf die Ich-Situation bezogen). Dadurch entstehen für den Schüler Ansätze für Fragen und Fragestellungen; dem Lehrer und den Mitschülern werden unterschiedliche Deutungen, Verkürzungen etc. sichtbar.

b) Ist der Anfang so gelungen, steht man schon in der schwierigen Phase des "Durchschaubarmachens" der Situation.
Hierzu gibt es u.a. folgende Vorschläge:

- Geeignete Fragestellungen an der Situation:
  Was passiert da?
  Wovon hängt es ab?
  Womit hat das einen Zusammenhang? ....
- Arbeiten an der Situation:
  -- Ändern der Repräsentationsform (Text in Bild umwandeln, Bild in Text, Experiment beschreiben durch Text oder Bild, ...)
  -- Situation in Einzelinformationen zerlegen und daraus wieder neu zusammensetzen lassen

-- Ggf. unbekannte (Teil-)Sachverhalte klären und Zusatzinformationen geben (etwa, wenn im Rahmen der Zinsrechnung Prospekte angesehen werden - oder bei Problemen aus anderen "Schulfächern").

Wird das Durchschauen der Situation so versucht, entstehen Fragen - häufig eine, oft aber auch mehrere -, die nun der Lösung bedürfen.
Es wird dann auch deutlich, welche Angaben für welche Frage wichtig sind, ob noch Angaben fehlen usw.

c) Um das "Lösen" in Gang zu setzen und durchzuführen, liegt jetzt die Lehrerfrage nahe: "Also, wie lösen wir jetzt die Aufgabe?" Doch beim Schüler ist eine andere Einstellung da. Er hat jetzt die Frage und möchte die Antwort haben, nicht den Weg zur Antwort.

Es liegen - nach Phase a), b) - sehr positive Erfahrungen mit folgender Strategie vor (die man den Schülern auch bewußt als Bearbeitungshilfe geben kann):

(1) Schätze die Lösung
(2) Löse die Aufgabe
(3) Bestätige Deine Lösung
(4) Schreibe die Lösung auf.

In (1) sollen die Schüler Notizen, Kritzeleien usw. machen und vor allem auch rechnerische Hilfsmittel (Taschenrechner) einsetzen; in (2) sollen sie sich selbst einen "Ablaufplan mit Endergebnis" ausdenken. Da i.A. ein Widerspruch zwischen (1) und (2) auftreten wird, ist die Reflexion in (3) sehr natürlich. Anschließend müssen Entscheidungen fallen und es muß klar gesagt werden, was nun herauskommt und was das Ergebnis bedeutet.
Ein unterrichtliches Problem dieser Strategie liegt darin, daß die Schüler nach (1) die Lust verlieren. Das hängt sehr stark von der Aufgabe und der Darstellungsart der betrachteten Situation ab. Es ist zu empfehlen, die genannte Strategie auch in Gruppen- oder Partnerarbeit durchzuführen, weil die Schüler dann verschiedene Wege gehen, das Problem nach ihren Bedürfnissen umformulieren (ggf. mit Informationsfehlern, z.B. Verwechseln von Prozentwert

und Grundwert). So entstehen dann bei der vergleichenden Abschlußbesprechung Lerngewinne für alle.
Man beachte, daß damit mehr gemeint ist als z.B. (frontal) verschiedene Lösungswege für dasselbe Problem zu behandeln!

Vom Typisieren von Aufgaben und Lösungen sowie dem Schaffen von Erkennungsmustern sollte man absehen. Der entscheidende Punkt - das Einüben in das zum Problem passende Auswählen aus dem mathematischen Bestand - fällt sonst weg. Alle Musterbildungen orientieren sich an Schlüsselzeichen, die so nur in den wohlsortierten Schulaufgaben vorkommen, nicht aber in realistischen Situationen. Außerdem wissen wir noch kaum etwas über die Art und Weise, wie Schüler (Individuen) diese Auswahlen und Erkennungsvorgänge durchführen; daher sollten wir uns vorerst auf das Schaffen von Lerngelegenheiten beschränken.

d) Trainieren - aber was und wie?

Strategien zur Informationsgewinnung und -verarbeitung sind individuell verschieden und nur unzureichend erforscht. Textaufgabendrill läuft daher jenseits momentaner Erfolge ins Leere. Die Schule kann aber Lerngelegenheiten schaffen, in denen Informationsgewinnung und -verarbeitung geübt werden kann. U.a. werden folgende Vorschläge hierzu gemacht:

- "Gleiche" Aufgaben, bei denen die entscheidenden Informationen jeweils anders ausgedrückt sind, herstellen und bearbeiten lassen (z.B. ".... und am Montag erhielt er 3 l Milch mehr als am Sonntag ..." vs. "und am Sonntag erhielt er 3 l Milch weniger als am Montag ...")
- "Pseudo-ähnliche" Aufgaben, die zwar "gleiche" Informationen enthalten (z.B. über Alter, Anzahl, Kosten), jedoch von Situation und Fragestellung her verschieden sind, herstellen und bearbeiten lassen
- Finden vereinfachender Fragestellungen bei komplizierten Fragen bzw. Aufgliedern von Fragen in Teilfragen

- Rückfragen wie: warum konnten wir diese Aufgabe überhaupt mathematisch lösen? Was sagt, nützt uns das Ergebnis? Was erfaßt es bezüglich der gegebenen Situation nicht?
- Analysieren eines (geeigneten) Gesprächs, dabei Wichtiges herausfiltern und ggf. versuchen, aus den vorhandenen Informationen weitere zu gewinnen (Beispiel: auf Tonband unterhalten sich 2 Personen über ihre Anteile an einer Erbschaft, wobei sie - da sie ja z.B. Gesamtsumme und Verteilungsschlüssel kennen - die Grundinformationen nicht nennen, dafür aber viele andere Dinge - auch persönlicher Art - erwähnen).

e) Eine Warnung

Der beliebte methodische Weg, über eine "spannende Anwendungsaufgabe" in ein mathematisches Gebiet einzusteigen, ist sehr problematisch.
Neben dem Spannungsabfall, der anschließend sofort eintritt, wird beim Schüler der Eindruck verstärkt, Anwendungsprobleme seien nur verborgene "Mathe" und nur solche kämen im Unterricht auch vor.
Sachsituationen im hier besprochenen Sinne stellen eigene Unterrichtseinheiten dar.

Forderungen an die Gestalt von Textaufgaben und einschlägigen Sachproblemen

Eine Grundforderung ist es, die einschlägigen Probleme nicht ausschließlich in Textform darzubieten. Bei Texten suchen Schüler immer gleich nach Formeln und verbauen (sich) so den Weg zum Problem selbst.
Bei Situationen in Real- und Bildform (Beobachten, Experiment, Spiel, Film, Tonband, ...) wird viel stärker nach Lösungen des Problems selbst gesucht.

Die Aufgabe selbst soll offen, ohne eng lösungsbestimmende Frage, anregend und aktuell sein. Sie soll eine reiche Situation darstellen und nicht mit einer Rechnung zu Ende geführt werden können.

Alle Aufgaben, die wirtschaftliche Probleme darstellen, sollen in geeigneter Weise den relativen Charakter der Daten betonen (nicht: "3 kg Wurst kosten 8 DM", sondern: "3 kg Leberwurst kosteten 1981 in einem Supermarkt 8 DM"). Damit werden keine falschen Vorstellungen wirtschaftlicher Daten genährt, zum anderen tauchen sofort neue Fragen auf (und heute? Und beim Einzelhändler? Warum? Lohnt es sich noch, zum Supermarkt rauszufahren? ...).

Die Aufgaben sollten möglichst nicht hypothetische Form haben (z.B. "nimm an, jemand hätte 3 kg Wurst gekauft ..."). Die hypothetische Form hat für Schüler einen starken "Mathe-Geruch" an sich und fördert formelhaftes Verhalten anstelle einer Situationsanalyse.

Nicht-teilbare Größen und viele große Zahlen stören die Bereitschaft des Schülers, an die Aufgabe überhaupt heranzugehen, wenn der Taschenrechner nicht erlaubt ist.
Brüche stören immer erheblich. Dezimale Angaben sind i.A. besser und realitätsnaher.

In der folgenden Schlagwortliste sind alle Eigenschaften einer guten Problemaufgabe zusammengefaßt, wie sie sich aus dem derzeitigen Erfahrungsstand ergeben (- und Sachaufgaben sollen ja auch gute Problemaufgaben sein):

- keine eingekleidete oder versteckte Mathematikübung
- anregend zum Stellen vieler Fragen, auch nichtmathematischer
- nicht nur ein Ergebnis, nicht auf nur eine Lösungsmethode hinauslaufend (z.B. "mit Gleichung"); soll auch durch Probieren und ähnliche "unmathematische" Methoden lösbar sein
- redundant (also viele Angaben, nicht alle notwendig) und überraschend.

Beispiele und Materialien

a) Beispiel einer reichen, aktuellen Textaufgabe mit nicht eng vorfixierter Aufgabenstellung und affektiven Elementen:

Kadett oder VW - das ist hier die Frage

Im Mai wird Erika 18 Jahre und möchte sich dann ein Auto kaufen. Sie hat zwei Angebote. Erika's Onkel würde ihr einen alten Käfer für nur 8oo,-- DM überlassen. Dieser verbraucht jedoch ziemlich viel Benzin, nämlich im Durchschnitt 11 Liter auf 1oo km. Günstiger im Verbrauch wäre ein Kadett, der mit durchschnittlich 8 l auf 1oo km auskommt und ihr für 2 ooo,-- DM angeboten wird. Steuern und Versicherungsbeiträge sind bei beiden Autos gleich hoch. Erika muß davon ausgehen, daß sie beide Autos nur bis zum nächsten TOV-Termin (in 2 Jahren) fahren kann.
Eigentlich gefällt ihr der Kadett etwas besser. Aber da sie nicht viel Geld hat, will sie sich genau überlegen, welches Auto finanziell am günstigsten ist. (PECHNER [1981])

b) Beispiel einer relativ offenen Textaufgabe mit dem "Zwang zum Bild", mit mehreren Strategien (auch nicht-algebraischen):

Treffpunkt Autobahn - um Mitternacht

Der Spion mit Deckname Finger aus Hamburg und der Spion mit Deckname Andel aus München müssen sich unbedingt treffen, um wichtiges geheimes Material auszutauschen. Finger fährt mit seinem Toyota durchschnittlich 11o km/h, während Andel seinen schnellen BMW auf durchschnittlich 14o km/h bringt. (PECHNER/KEUTHEN u.a. [1981])

c) Beispiel einer problemorientierten Textaufgabe, die besonders zum Schätzen einer Lösung, zur bildlichen Darstellung und zum Experiment anregt. Beim ausführlichen Lösen und Bestätigen der Lösung ergeben sich wahrscheinlich Oberraschungen:

"Ist es möglich, eine rechteckige Platte 2,35 m x 4,7 m durch eine 2,2o m hohe und o,95 m breite Tür zu transportieren?" (BIRNBAUM [1981])

d) Materialhinweise:

ANDELFINGER/ANDELFINGER [1980], BECKER u.a. [1979], DIFF: HE 1 [1979], DIFF:HE 2 [1980], DIFF: HE 11 [1980], MAIER/SCHUBERT [1978], MÜNZINGER [1977], MUED [1979 ff.], SCHÖRK [1980], STATISTICS IN YOUR WORLD [1980], ULRICH [1980], STREHL [1979].

9.7 Übersichtstafel: Lehrziele im Bereich "Proportion"

Blatt 1

Aspekt	Verhältnisse	Schlußrechnen	Funktion
Hauptlehrziele	Entwicklung des proportionalen Denkens als eigenständige Vorstellung, auch in konkreten Zusammenhängen und in altersgerechter Stufung, die zunehmend zur Verbindung mit anderen Vorstellungen (Bruchrechnung, Funktion etc.) führt	Entwicklung eines Konzepts beim Schüler, das es ihm ermöglicht, geeignete inner- und außermathematische Probleme unter Anwendung funktionaler, proportionsbezogener und isomorpher Methoden zu lösen	Entwicklung von Bereitschaft und Fähigkeit beim Schüler, proportionale und antiproportionale Probleme als Probleme des Zusammenhangs von verschiedenen Größen zu sehen und zu lösen
Teillernziele			
Kl. 5	Pflege und mathematische Weiterentwicklung der intuitiven Vorstellung vom "internen" Verhältnis		
Kl. 6		Zugang zum Schlußrechnen samt Anwendungen über das isomorphe Rechnen, verbunden mit grafischen Darstellungen - ohne funktionale und proportionale Konzepte	
Kl. 7			
Kl. 8	Erweiterung des Gesichtsfeldes der Schüler für die Betrachtung von "externen" Verhältnissen	Versuch einer Erweiterung des Schlußrechnens unter Hinzunahme funktionaler Konzepte, u.a. auch der Antiproportionalität	Tabellarische und grafische Darstellung proportionaler und antiproportionaler Probleme, ihre Deutung als Zusammenhang und Veränderung verschiedener Größen; Benützung der Darstellungs- und Deutungsmöglichkeiten zur Problemlösung
Kl. 9	Kontrollierter Umgang mit externen Verhältnissen	Erstreben eines "Verbindungskonzepts Schlußrechnen" unter funktionalen, proportionalen und isomorphen Gesichtspunkten	Versuch einer Entwicklung (normierter) funktionaler Lösungsstrategien für proportionale und antiproportionale Probleme
Kl. 1o			

Blatt 2

Aspekt	Ähnlichkeit	Brüche	Textaufgaben/Sachrechnen
Hauptlehrziele	Entwicklung einer "Formvorstellung" für Figuren, genannt "Ähnlichkeit", Entdecken und Verwenden proportionaler Aspekte an ähnlichen Figuren - vor allem im Rahmen ausgedehnter Anwendungsprobleme	Im Verbund mit der Entwicklung proportionalen Denkens zu einem besseren Verständnis äquivalenter Brüche gelangen und so die Regeln des Anordnens, Addierens und Subtrahierens sicherer anwenden; gleichzeitig den Bruch auch in der proportionalen Gestalt kennenlernen und so - zusammen mit anderen Bruchdarstellungen - der Vorstellung der (positiven) rationalen Zahl näherkommen	Aus geeigneter Problemsituationen (real, textlich, bildlich) Informationen so gewinnen und verarbeiten, daß sich sinnvolle Fragen und Lösungen der Aufgabenstellung ergeben. Hierbei besonders die Wahl der mathematischen Methoden pflegen.
Teillehrziele Kl. 5 Kl. 6 Kl. 7	↑	Förderung des Denkens in "gleichwertigen Bruchdarstellungen"	↑
Kl. 8	Über Parallelitäten und Winkelgleichheiten erste Formerfahrungen fördern ↓	Erneutes Bruchrechnen unter stärkerer Berücksichtigung von Äquivalenzgesichtspunkten	Aufgabenstellungen dem jeweiligen Erfahrungsfeld und dem Umfang der verfügbaren mathematischen Methoden anpassen ↓
Kl. 9 Kl. 10	Entwicklung einer "Formvorstellung" für Figuren, genannt "Ähnlichkeit", Entdecken und Verwenden proportionaler Aspekte an ähnlichen Figuren - vor allem im Rahmen ausgedehnter Anwendungsprobleme	Einbeziehung des Bruchrechnens in die Bildung einer Vorstellung von "Zahl"	

Literaturverzeichnis

ANDELFINGER G./ANDELFINGER S.: Schülergerechte Verkehrsplanung - eine empirische Untersuchung in Kaarst.
In: Jugend forscht, Magazin Nr. 2, Ravensburg 1980

BAUERSFELD H. (Hrsg.): Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht, Hannover 1978

BECKER G. u.a.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I, Bad Heilbrunn 1979

BIRNBAUM P.: Zum selbständigen Finden von Lösungssätzen für Sach- und Anwendungsaufgaben (Teil 2).
In: Mathematik in der Schule 2/3, 1981

DIFF HE 1: Prozent- und Zinsrechnung, Verhältnisrechnen. Deutsches Institut für Fernstudien, Tübingen 1979

DIFF HE 2: Sachrechnen in der Wirtschaft, Wachstum und Zerfall. Deutsches Institut für Fernstudien, Tübingen 1980

DIFF HE 11: Beschreibende Statistik. Deutsches Institut für Fernstudien, Tübingen 1980

FEY J.T.: Mathematics Education Research on Curriculum and Instruction.
In: Research in Mathematics Education/National Council of Teachers of Mathematics, 1979, S. 388 - 432

FLOER J.: Untersuchungen zur Entwicklung und Förderung des Verhältnisdenkens bei Kindern, Berlin 1977 (Dissertation)

FUSON K.: An Analysis of Research Needs in Projective, Affine, and Similarity Geometries.
In: ERIC/ Recent Research concerning the development of spatial and geometric concepts, Ohio 1978

HÄUSSLER P.: Denkoperationen und Lernprozesse 12 bis 16jähriger Schüler beim Erkennen einfacher funktionaler Beziehungen im Physikunterricht, Kiel 1977 (Habilitationsschrift)

HART K.M. (Ed.) et al.: Childrens Understanding of Mathematics 11-16, London 1981

MAIER H./SCHUBERT A.: Sachrechnen. Empirische Befunde, didaktische Analysen, empirische Anregungen, München 1978

MONZINGER W. (Hrsg.): Projektorientierter Mathematikunterricht, München 1977

MUED: Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei. Kontaktadresse: Bahnhofstr. 72, 4405 Appelhülsen

PECHNER U.: VW oder Kadett - das ist hier die Frage. Unterrichtsentwurf Bezirksseminar Mönchengladbach 1980 (unveröffentlicht)

PECHNER U./KEUTHEN B. u.a.: Treffpunkt Autobahn - um Mitternacht. Beobachtungsprotokolle zum Problemlösen durch Schüler. Bezirksseminar Mönchengladbach 1980 (unveröffentlicht)

SCHORK T.: Kann ein Torhüter beim Fußballspiel einen plazierten Elfmeterschuß fangen?
In: Jugend forscht Magazin Nr. 2, Ravensburg 1980

STATISTICS IN YOUR WORLD: Schülerhefte und Lehrermaterial des Schools Council Project on Statistical Education, Schools Council Publications (GB) 1980

STREHL R.: Grundprobleme des Sachrechnens, Freiburg 1979

SUAREZ A.: Formales Denken und Funktionsbegriff bei Jugendlichen, Bern 1977

SUAREZ A./BINER H.: Das Mausspiel.
In: Didaktik der Mathematik 4/1977, S. 296 - 306

SUYDAM M.N.: Review of Recent Research Related to the Concepts of Fractions and of Ratio.
In: Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe D, Band 1, 1978

ULRICH N.: Ist mein Roulette ein echtes Glücksrad?
In: Jugend forscht Magazin Nr. 2, Ravensburg 1980

VERGNAUD G.: Didactics and acquisition of 'multiplicative structures' in secondary schools.
In: Cognitive Development Research in Science and Mathematics, University of Leeds 1980

Dokumentation: Literaturnachweise 3

Quellensammlung zu: Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: Proportion

Landesinstitut
für Curriculumentwicklung,
Lehrerfortbildung
und Weiterbildung

132

In der Dokumentationsreihe des Landesinstituts werden dokumentarische Ausarbeitungen zu den organisatorischen und pädagogischen Entwicklungen in Schule und Weiterbildung veröffentlicht.

Entsprechend den Schwerpunkten der dokumentarischen Arbeit am Landesinstitut sind innerhalb der Dokumentationsreihe drei Unterreihen vorgesehen.

Dokumentation: Bildungswesen

Veröffentlichungen zu Strukturfragen des Bildungswesens.
Hierunter fallen Übersichten über gesetzliche und erlaßmäßige Regelungen einzelner Bereiche des Bildungswesens in der Bundesrepublik, Stundentafelübersichten, Darstellungen zu Differenzierungsverfahren, Abschlußregelungen und Eingangsbedingungen in einzelnen Bildungsgängen u. ä.

Dokumentation: Unterrichtsmaterialien

Dokumentarische Darstellung und Aufbereitung von Unterrichtsmaterialien - Lehrbücher, Unterrichtseinheiten, Handreichungen durch bibliographische Erfassung, Kurzbeschreibung und unterrichtsorganisatorischer Hinweise.

Dokumentation: Literaturnachweise

Bereitstellung von Literaturnachweisen zu bestimmten Themenbereichen.

Dokumentation: Literaturnachweise 3

Quellensammlung zu: Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: Proportion

Bearbeiter:

Bernhard Andelfinger

und

Rolf D. Zuckett-Peerenboom

Landesinstitut
für Curriculumentwicklung,
Lehrerfortbildung
und Weiterbildung

131

Quellensammlung zu:
/Didaktischer Informationsdienst Mathematik/.
Thema: Proportion

Andelfinger, Bernhard (Bearb.);
Zuckett-Peerenboom, Rolf D. (Bearb.);

Landesinstitut für Curriculumentwicklung,
Lehrerfortbildung und Weiterbildung (Neuss)(Hrsg.);

Neuss: LI/1982/. 395 S.

Dokumentation: Literaturnachweise. 3.

Curriculum; Curriculumentwicklung; Mathematikunterricht: Sekundarstufe I; Didaktik; Fachdidaktik; Funktion; Bibliographie; Geometrie; Empirische Untersuchung; Fragebogen; Materialsammlung; # Bruchrechnung; # Proportionalität; # Evaluation;

1. Auflage 1982

Nachdruck nur mit Genehmigung des

Landesinstitut für Curriculumentwicklung,
Lehrerfortbildung und Weiterbildung
Görlitzer Str. 3, 4040 Neuss

I N H A L T

VORWORT		5
AM BEGINN		7
VORBEMERKUNG		9
1.	LEHRERUMFRAGE/MATERIALIEN UND ERGEBNISSE	13
1.1	Umfragetext	13
1.2	Ergebnisse	17
1.2.1	Hauptschule	17
1.2.2	Realschule	21
1.2.3	Gymnasium	27
1.2.4	Gesamtschule	31
1.3	Antwortblätter der Umfrage (Abschriften)	35
1.3.1	Hauptschule	35
1.3.2	Realschule	51
1.3.3	Gymnasium	75
1.3.4	Gesamtschule	95
2.	LITERATURNACHWEISE	105
2.1	Allgemeines	109
2.1.1	Empirische Unterrichtsforschung Mathematik (Methoden)	109
2.1.2	Empirische Unterrichtsforschung Mathematik (Beispiele)	121
2.2	Dokumente zum Thema: Verhältnis/ Proportion/Wahrscheinlichkeit	139
2.3	Dokumente zum Thema: Schlußrechnen mit Anwendungen	197
2.4	Dokumente zum Thema: Funktionen, vor allen auch im Zusammenhang mit Proportionalitäten und Antiproportionalitäten	233
2.5	Dokumente zum Thema: Ähnlichkeit, vor allem auch im Zusammenhang mit dem allgemeinen geometrischen Umfeld	265

2.6	Dokumente zum Thema: Bruchrechnen, vor allem auch im Zusammenhang mit dem Konzept der rationalen Zahl	283
2.7	Dokumente zum Thema: Textaufgaben/ Sachrechnen	307
3.	AUSWERTUNG DER LESERUMFRAGE *)	349
3.1	Fragestellung	349
3.2	Erhebungsinstrument	349
3.3	Stichprobe	349
3.4	Ergebnisse	350
4.	REGISTER	355
4.1	Verfasserregister	357
4.2	Institutionenregister	363
4.3	Sachregister	365
4.4	Titelregister	373
4.5	Zeitschriftenregister	389
4.6	Standortregister	391

*) Verfasser dieses Kapitels sind H. Haenisch (Referat I/6) und R. D. Zuckett-Peerenboom (Referat Z 3); die übrigen Kapitel wurden von B. Andelfinger und R. D. Zuckett-Peerenboom vorbereitet.

V O R W O R T

Unterricht ist ein Prozeß der Kommunikation zwischen Lehrenden und Lernenden, zwischen verschiedenen Denkstilen und Erwartungshaltungen.

Der "Didaktische Informationsdienst Mathematik" will diesen kommunikativen Problemen nachgehen, indem er einerseits die empirischen Ergebnisse zum fachspezifischen Lehr-Lernprozeß zusammenfaßt und gemeinsam mit dem derzeitigen fachdidaktischen Entwicklungsstand überblickhaft darstellt. Neben dem Wunsch, den Mathematiklehrern Hilfen zu geben, ist mit dem "Didaktischen Informationsdienst Mathematik" das Ziel verbunden, den Informations- und Erfahrungsaustausch unter den Fachkollegen einzuleiten und zu unterstützen.

Der erste Schritt auf diesem Weg war die Veröffentlichung des Heftes "Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Proportion" (Reihe: Curriculum Heft 22) Ende 1981.

Mit dem hier vorliegenden Dokumentationsband wird nun allen Interessierten der Weg zum Daten- und Erfahrungshintergrund dieses Heftes "Proportion" geöffnet. Hier können die Stimmen der Lehrer und Forscher, durch sie auch die Stimmen der Schüler, gehört werden.

Die spontane und außerordentlich umfangreiche Reaktion auf das Heft "Proportion" sowie der spätere Erscheinungstermin dieses Bandes haben es ermöglicht, erste Einschätzungen durch Lehrer bereits mitzuteilen.

So kann der vorliegende Band wiederum dazu anregen, didaktische Fragen neu zu stellen und sie einer unterrichtsdidaktischen Diskussion zuzuführen.

Dr. Paul Hamacher

A M B E G I N N

dieses Bandes stand ein riesiger Stapel von Büchern, Zeitschriftenbeiträgen, Mikrofilmen, Fragebogen, Tabellen usw..

Alles mußte erfaßt, bibliographisch geordnet, kategorisiert, numeriert, elektronisch verarbeitet werden.

Daß hieraus ein übersichtlicher, informativer Band wurde, ist vor allem das Verdienst des Referats Dokumentation im Landesinstitut.

In diesem Zusammenhang danke ich Herrn Zuckett-Peerenboom für die Gesamtgestaltung des Bandes, Frau Spindler für die vielfältigen Erfassungsarbeiten sowie Herrn Dr. Hänisch für die Leitung der Rückmelde-Aktion. Herr Dr. Vogel und seine Mitarbeiter haben das Vorhaben energisch gefördert und über manche Klippen gesteuert.

Mein Dank gilt auch allen Lehrern und Lesern im In- und Ausland, die mit ihren Antworten und Rückmeldungen dazu beigetragen haben, daß wir jetzt wieder etwas mehr über Mathematikunterricht wissen.

Dr. Bernhard Andelfinger

V O R B E M E R K U N G

Die vorliegende Dokumentation gehört zu dem Heft: DIDAKTISCHER INFORMATIONSDIENST MATHEMATIK THEMA: Proportion, Reihe: Curriculum/Heft 22 des Landesinstituts.
Sie beschreibt die dort verwendeten Quellen und Lehrerumfragen nach bibliographischen Gesichtspunkten.
Das erwähnte Heft beschäftigt sich mit dem Lernverhalten von Schülern im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, besonders im Hinblick auf die Entwicklung proportionalen Denkens. Das Heft vergleicht dieses Verhalten mit Anforderungen und Zielen der Fachwissenschaft Mathematik, der Schulmathematik und der Fachdidaktik Mathematik. Aus den entdeckten Unterschieden und Problemen werden Schlüsse für die Unterrichtspraxis gezogen. Der Fachlehrer(und Leser) wird so in die Lage versetzt, nicht mehr nur fragen zu müssen: wie kann ich vorgegebenen Stoff vermitteln? Er kann jetzt fragen: was ist durch den Schüler faßbar, was führt ihn in seiner Entwicklung mathematischer Denkstrukturen weiter und was liefert ihm darüber hinaus einen Baustein für eine Sammlung "relevanter Elemente von Mathematik".

I Art der Dokumente

Zum überwiegenden Teil handelt es sich um Dokumente mit empirischen Daten zum Lehr-Lern-Prozeß im Umfeld des Themas "Proportion", in denen häufig auch unterrichtspraktische Vorschläge enthalten sind.

II Gliederung der Dokumentation

Nach diesen Vorbemerkungen finden Sie im Kapitel 1 Fragetext und Ergebnisse einer Umfrage bei Lehrern an Hauptschulen, Realschulen, Gymnasien und Gesamtschulen in Nordrhein-Westfalen zum Themenbereich "Proportion".
Diese Umfrage zeigt, wie Schüler der verschiedenen Schularten im weiten Feld "Proportion" nach Einschätzung ihrer Lehrer denken, reagieren und arbeiten.
In Kapitel 2 sind Dokumente der Unterrichtsforschung Mathematik gesammelt. Kapitel 2 ist mehrfach unterteilt:

- In 2.1.1 und 2.1.2 finden sich einschlägige Materialien, die einen allgemeinen, überblickhaften oder exemplarischen Charakter der mathematischen Unterrichtsforschung tragen. Die Sammlung dieser Materialien ist gedacht für Leser, die sich von Methoden und Arbeitsweisen der empirischen Unterrichtsforschung ein erstes Bild machen wollen. Die Sammlung ist daher weder vollständig noch repräsentativ.
- Unter den weiteren Gliederungspunkten des Kapitels 2 ist das Material eingeordnet, welches sich stärker dem Hauptthema "Proportionen" zuordnet. Hier sind die wichtigsten empirischen Untersuchungen der letzten 20 Jahre vertreten, z. T. handelt es sich auch um Forschungsberichte, die ihrerseits schon mehrere Orignialuntersuchungen auswerten.
  Auf diese Weise entsteht ein Überblick über weit mehr als 300 einschlägige Forschungsarbeiten, der als repräsentativ - wenn auch nicht als vollständig - bezeichnet werden kann.

Es muß beachtet werden, daß Beiträge oft unter mehrere Aspekte fallen und - obwohl nur einmal abgedruckt - mehreren unterschiedlichen Rubriken zugeordnet sind. An wichtigen Stellen sind daher Querverweise angegeben.

Dem Leser von Kapitel 2 wird auffallen, daß ein Großteil der angegebenen Untersuchungen nicht aus der Bundesrepublik Deutschland stammt. Es ist daher zweckmäßig, Daten aus Kapitel 2 mit Daten aus Kapitel 1 zu vergleichen, um Übereinstimmungen und Unterschiede festzustellen.

Im Kapitel 3 finden sich Daten und Auswertungen einer Leserumfrage. Durch den späteren Erscheinungstermin der Dokumentation war es möglich, die Auswertung der den ausgelieferten Textbänden "Porportion" beigefügten Fragebogen vorzunehmen und hier auszugsweise abzudrucken. Dabei haben wir uns hier auf wichtige quantifizierbare Aussagen und eine Auswahl der von den Lesern reichlich gegebenen Hinweise und Empfehlungen beschränkt.

Die Dokumentation wird durch ein differenziertes Register abgeschlossen.

III Vorschläge zur Handhabung der Dokumentation

Die vorliegende Dokumentation läßt sich z.B. gebrauchen

- als Hilfe zur quellenmäßig genaueren Interpretation des Heftes DIDAKTISCHER INFORMATIONSDIENST MATHEMATIK THEMA: Proportion.
  Die Gliederung des Kapitels 2 entspricht der Gliederung des genannten Heftes;
- als Hilfe zur ersten Einarbeitung in Fragestellungen, Methoden und Ergebnisse der empirischen Unterrichtsforschung im Mathematikunterricht;
- als Überblick über die Lage der aktuellen empirischen Unterrichtsforschung im Umfeld des Themas "Proportion" bis ca. 1981.

Die Offenlegung aller Entscheidungsgrundlagen ist als eine vertrauensbildende Maßnahme zu verstehen: Nur in einem Klima von gegenseitigem Vertrauen kann eine fruchtbare Interaktion zwischen Praktikern und Theoretikern des Systems "Schule" stattfinden, eine Interaktion, die den Adressaten aller Bemühungen von Leser und Hersteller dieses Buches, den Schüler, zu keiner Zeit aus dem Gesichtsfeld verliert.

1. LEHRERUMFRAGE MATERIALIEN und ERGEBNISSE

1.1 Umfragetext

Mit dem folgenden Text wurden Lehrer aller Schularten der Sekundarstufe I (NRW) befragt. Die Absicht war, ohne künstliche Vorgliederung spontane Eindrücke des Schülerverhaltens und der Lehrererfahrungen zu erhalten. Gleichzeitig sollte damit ein Interpretationshintergrund für die häufig nicht aus der Bundesrepublik Deutschland stammenden empirischen Untersuchungen (vgl. Abschnitt 2) geschaffen werden.

Dreisatz - kein Problem?

Proportionen, umgekehrte Proportionen, Größenpaare, funktionale Deutung, Simplex, Sachrechnen - das sind Stichworte, die unterrichtliche Probleme aufwerfen.
Dazu kommt, daß proportionale Probleme nach ihrer ersten Einführung auch später in der Prozent- und Zinsrechnung, bei Zinseszinsfragen, in der Algebra (Textaufgaben), in der beschreibenden Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei Funktionsbetrachtungen in der Geometrie (Ähnlichkeit, Strahlensätze) eine Rolle spielen. Schließlich kann der Taschenrechner besser mit Proportionen als mit Brüchen umgehen.

Sie als praktisch tätiger Lehrer haben einen Eindruck von Unterricht und vom Lernverhalten Ihrer Schüler der Sekundarstufe I im großen Bereich "Proportionalität".
Wir bitten Sie daher, uns Ihre Einschätzung zu den drei folgenden Fragen formlos, ohne Namensangabe, jedoch mit Nennung der Schulform bekanntzugeben:

1) Welches Verhalten, welche Lernschwierigkeiten und Einstellungen zeigen Ihre Schüler in den verschiedenen Altersstufen der Sekundarstufe I in den oben angesprochenen Bereichen?
2) Wie begegnen Sie den oben genannten Problemen im Unterricht?
3) Welche weiteren Vorschläge können Sie darüber hinaus aus Ihrer Erfahrung machen?

Antworten Sie bitte spontan, immer im Blick auf Ihren Unterricht; praktische Erfahrung ist wichtiger als systematische Vollständigkeit oder stilistische Eleganz.
Wir wären Ihnen dankbar, wenn Sie uns Ihre Antwort bis zum 15.01.1981 zurücksenden könnten.

Auf dem Antwortbogen war die Angabe der Schulform vorgesehen.

Die bei uns eingegangenen Antwortblätter wurden nach Schulform getrennt ausgewertet: Die Ergebnisse finden sich in den folgenden Tabellen, Einzelhinweise sind als Anmerkungen den Tabellen beigefügt.

Um die Transparenz dieser für das gesamte Projekt grundlegenden Untersuchung zu erhöhen, haben wir sämtliche eingegangene Antwortblätter diesem Kapitel beigefügt.
Sie können also bei den, oft plakativ wirkenden, schlagwortartigen Zusammenfassungen in jedem Einzelfall prüfen, auf welcher Grundlage die Aussage fußt.

1.2 ERGEBNISSE

1.2.1 HAUPTSCHULE

HAUPTSCHULE

	Proportionalität	Dreisatz	Sachrechnen	Brüche/DZ	Proportionalität/Antiproport.	Funktion	Strahlensätze
Haupteindruck	- bestimmte Proportionen zu abstrakt - lange operatorische Verläufe, Gefühl der Schüler, kaum Lernfortschritte zu machen - die meisten Themen zu abstrakt/zu wenig Qualitätsfrage	- Eltern machen es "einfacher"	- Schüler begrüßen den Sachzusammenhang - schwer, weil Sinnerfassung problematisch	- unumgänglich - bei Operatormethode werden Lücken in der Strukturerkennung sichtbar (also auch oft ohne Brüche??)	- Verwechslung		
Schwierigkeiten allgem. Asp.		- Verhältnisgleichungen schnell, aber unsicher - Schüler wollen ein Schema auf alles anwenden - funktionaler Aspekt wenig hilfreich, macht es nicht anschaulicher	- Schüler wollen ein Schema auf alles anwenden		- Schüler wollen ein Schema auf alles anwenden		
numer. Asp.	- bestimmte Proportionen zu abstrakt						
inf. verarb. Aspekt			- gegebene Werte im Text finden schwer - Textinterpretation größte Probleme - Zuordnung zu Formel sehr schwer - Verwechslung von Grundwert und Prozentwert - Herauslesen mathematischer Strukturen größtes Problem (am Texten)				
Häufigkeit allgemein	- Nur in E-Kursen, kein langfristiger Lernerfolg	- individuell ganz verschieden - Denken in funktionalen Zusammenhängen für Schüler besonders schwierig	- individuell ganz verschieden		- Antiproportionen unendlich schwerfälliger (setzt viele mathematische Erkenntnisse voraus)		
Alter		- Klasse 9/10 besser, aber nur mit Üben - Klasse 8/9 Ansatz leicht, Lösungsweg ("Schluß auf 1") schwer - Klasse 8 (E-Kurs) beginnt "Überblick" zu entstehen (nicht in G-Kurs)			- Klasse 6-8 besonders große Verwechslungsgefahr		
Günstige Einflüsse		- enorme Hilfe für die Bewältigung neuer Probleme					
Methodisch-didaktische Hinweise	Siehe Anmerkung 1	Siehe Anmerkung 2	Siehe Anmerkung 3	Siehe Anmerkung 4	- Siehe Anmerkung 5		

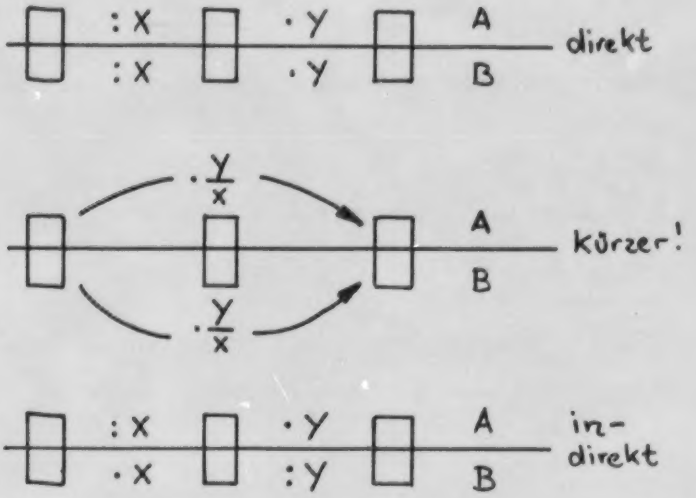
HAUPTSCHULE:

Anmerkung 1:

- Nicht mit "rechnerischen" Proportionen arbeiten, sondern bildhaft (und damit überschaubar)
- Nicht nur über Mengenlehre erklären

Anmerkung 2:

- Schema:



- Arbeitsmaterial verwenden
- Elternseminar

Anmerkung 3:

- Erkennungsmuster bilden
- Durchschaubar machen
- Kopfrechnen, Taschenrechner zur Zeitersparnis
- Am Anfang ungeordnete, problemorientierte Lernsituation
- Text reduzieren auf das Notwendigste
- Texte in Bilder umformen und umgekehrt
- Aufgabe in Einzelinformation zerlegen und neu formulieren lassen
- An einem Problem mehrere Lösungswege aufzeigen

Anmerkung 4:

- Wiederholung unumgänglich

Anmerkung 5:

- Ergebnis schätzen vor Lösung der Aufgabe
- Typ unterscheiden; Aufgaben selbst stellen
- Sortieraufgabenstellung

1.2.2 REALSCHULE

REALSCHULE

	Proportionalität	Dreisatz	Sachrechnen	Brüche/DZ	Proportionalität/Antiproport.	Funktion	Strahlensätze
Hinweis/Eindruck	- Antipathie - erfordert Erkennen einer Struktur in Sachverhalten und Einblick in Relationen, in Zahlenmaßen - Undurchschaubarkeit - Proportion ist ein "Oberbegriff" - Verhältnisgleichungen abgelehnt (Klasse 7) Zuordnen	- "intuitiv" klar - "alter Dreisatz" gilt als einfach(er) - Angstthema	- wenig interessiert - Angstthema - jedes Anwendungsgebiet der Proportionen erscheint als "separat" von anderen	- Angstthema	- Unterscheidung sehr schwer (Intelligenzsache) - Angstthema		- Klasse 9 (Strahlensätze): Vermessungsprobleme (z.B. Turm) interessant
Strategien							
algor. Asp.	- Formeln leichter, aber Schülern damit vorgetäuscht - wegen Undurchschaubarkeit ein Lehrerschwerpunkt - Verhältnisgleichungen sehr abstrakt, Mittel in Klasse 7 noch nicht bekannt	- intuitives Vorverhalten stört Entwicklung eines Algorithmus - nicht über 1, sondern über q!! - gleiche Operatoren in Vor- und Nachbereich - "Schließen" über die Einheit ist effektiv	- vorwiegend Dreisatz		- vorwiegend in Dreisatzform - der "umgekehrte Dreisatz" ist einfacher als andere Deutungen der Antiproportionalität.		- vorwiegend mit Verhältnisgleichungen
numer. Asp.		- den Schülern vorwiegend bei einfachsten Zahlenwerten intuitiv klar, sonst nicht oder kaum					- Klasse 9: Transfer der Proportionen in die Figur und umgekehrt schwierig
inf. vorstr. Aspekt			- Text → mathematischer Ausdruck sehr schwer - Zuordnen von bereits vorhandenen mathematischen Verfahren auf die Sachsituation, für Schüler schwierig - Kritiklosen Umgehen der Ergebnisse - Verständnis der Textaufgabe überhaupt (was ist gesucht?)				

REALSCHULE FORTSETZUNG

	Proportionalität	Dreisatz	Sachrechnen	Brüche/DZ	Proportionalität/Antiproport.	Funktion	Strahlensätze
Faßbarkeit allgemein	- 1- und Einsetzung über Proportionen gut - mathematisch begabte Schüler gut, schwächere scheitern an der Vielzahl der Zahlen und deren Zusammenhang	- "alte Methode" bleibt gut haften - systematischer Umgang mit Größen problematisch	- Graphik/Tabelle gut; Gleichung nicht (Klasse 7) - Gl/PS schwer, auch Verwechslung - Anwendungen textlich lesen und genau durchführen ist schwer	- mangelnde Kenntnisse stören sehr	- Graphik/Tabelle gut, Gleichung nicht		
Alter	- erst ab Klasse 9 allgemeine Größen behandelbar - Anfangsstufe: Zuordnen - Klasse 7: Unverständnis - es ist halt so! - Thema kreuz wird auch später nur wenig wieder aufgegriffen - Klasse 9/10: problemlos, gern und selbstverständlich - Klasse 9: Steigungsdreieck schwer (und wichtig), weil hier zum 1. Mal "Verhältnis" als mathematischer Begriff vorkommt						- Klasse 9: rechnerischer Weg wird akzeptiert (bei zentrischer Streckung)
Sonstige Einflüsse		- "altes Schema" des Elternhauses verwirrt den Unterricht - Aufnahmeprüfungen der DK usw. wirken sich aus					
Methodisch-didaktische Hinweise	Siehe Anmerkung 1	Siehe Anmerkung 2	Siehe Anmerkung 3	Siehe Anmerkung 4	Siehe Anmerkung 5		Siehe Anmerkung 6

REALSCHULE:

Anmerkung 1:

- Systematischer Aufbau von Klasse 7 - 10
- Ständig alles auf den Begriff der Proportion zurückbinden

Anmerkung 2:

- Reduktion auf für Schüler akzeptable Lösungsstrategien, die entwickel- und nachvollziehbar sind
- Vorrangig Gleichungsumformungen
- Elternarbeit
- Ausweichen auf Formel- und Merksatzmathematik
- Durch Vorgabe "komplizierter" Zahlenwerte Zwang zur Analyse der Handlungsmuster schaffen und eine allgemeine Lösungsstrategie (z.B. als Flußdiagramm) herausarbeiten
- funktionale Deutung, Zuordnungen stark betonen
- nicht mehrere Lösungsverfahren gleichzeitig anbieten
- in Klasse6/7 viele, einfache Beispiele
- Gleichungen schon früh, nicht Operatoren
- Zuordnungstabellen ab Klasse 5

1 h	$\frac{1}{5}$ h	$\frac{3}{5}$ h	...
60 min	12 min	36 min	...

dabei: gleiche Operatoren hervorheben.

Erst im Laufe der Zeit aus den Tabellen mechanische Rechenverfahren, Proportion, Gleichungen etc. entwickeln

- bis Klasse 8 auf anschauliche Größen beschränken
- Sprache und Mathematik verbinden (Sätze lesen lassen)

Anmerkung 3:

- Schüler sollen sich selbst ein "Kochrezept" bzw. einen "Ablaufplan" erstellen, mit dem sie diese Aufgaben durchlaufen können
- Vorab die "Zuordnungen" in der Textaufgabe suchen lassen und wovon diese Zuordnungen abhängen bzw. wie sie beschaffen sind
- durch "gemischte Zuordnungstabellen" Zinsrechnung ohne Äquivalenzumformung in Klasse 7 möglich
- viele Skizzen, Zahlen vereinfachen
- Sachaufgaben sollen nicht (immer) am Ende eines Themas stehen

Anmerkung 4:

- sich der Strukturgleichheit bei der Bruchrechnung (Kürzen/Erweitern ≙ Verwandeln quot. gleicher Zahlenpaare) bewußt sein

Anmerkung 5:

- Schüler sollen selbst leicht zu merkende Unterscheidungskriterien formulieren
- Bedingungs- und Fragesatz anschreiben, nicht verkürzen
- den Unterschied an den Graphen verdeutlichen
- "logische" Ergebniskontrolle, besonders beim Taschenrechner
- mehrere Rechenverfahren für eine Aufgabe
- "gemischte" Zuordnungstabellen:

Anzahl der Arbeiter	Tage	Arbeit (m^2)

1 Größe zunächst invariant (abdecken), danach die andere

Anmerkung 6:

- gründliche "Algebraisierung"

1.2.3 GYMNASIUM

GYMNASIUM

	Proportionalität	Dreisatz	Sachrechnen	Brüche/BZ	Proportionalität/Antiproport.	Funktion	Strahlensätze
Haupteindruck	- eine natürliche Zahl gilt nicht als Verhältnis; ist "voraussichtlich" (Zahlenbereichserweiterung fehlt bei Schülern!)	- großer Rechenaufwand (3 Sätze) abschreckend - bei vertrauten Größen und in überschaubarem Rahmen "vertraut"	- Interesse, aber durch — - Vorurteile in Einrechnen (können alle nicht, "wenn ich schon das Wort 'Textaufgaben' höre, kann ich nichts mehr") - Angst bis zum Abitur	Abneigung gegen BR von den eigentlichen Problemen abgelenkt.	- Unterscheidungsproblematik äußerst groß		
Strategie algor. Asp.		- als 'Zusammenhang' zwischen vertrauten Größen (bei Konstanzannahme dritter Größen) - Schüler stricken sich selbst Regeln - Schema notwendig, sobald einfacher/überschaubarer Rahmen verlassen wird	- Versuch mit 1 Rechnung auszukommen oder totale Resignation				- Schreibweise mit Doppelpunkt hinderlich - eine Zahl gilt nicht als Verhältnis
anwor. Asp.							
inf. verarb. Aspekt		- "je größer - desto größer" wird nur als linear interpretiert - Graphenbeschreibung schwierig (kein Ausdrucks- und Erfahrungsbereich in Klasse 7)	- mangelnde Konzentrations- und Organisationsfähigkeit (Reizwort - Ablenkung?) - Große Schwierigkeitsunterschiede in den Aufgabenteilen erschweren die Bearbeitung (→ auch Tätigkeitsbereite damit gemeint?)		- "je größer - desto kleiner" wird oft nur als reziprok (oder linear?) gesehen - Graphenbeschreibung schwierig (kein Ausdrucks- und Erfahrungsbereich in Klasse 7) - Aufgabentexte "verwirren" den Schüler bei der Entscheidung sachlich - völlig unkritische Einstellung gegenüber nichtproportionalen Zusammenhängen (5 Kler..)	- x → y wird als "x wird dem y zugeordnet" verstanden	
Teilbarkeit allgemein Alter	- Definition in Klasse 7/8 nur rein mechanisch gelernt - Größenpaare, Graphen machen Spaß - "Verhältnis" schwierig, Verhältnisgleichheit sehr schwierig - große Vergessensquote - Anwendungsbezug motiviert nicht	- bei vertrauten Größen als Zusammenhang ist die Zuordnungsstruktur allgemein da	- Codierungsprobleme - Bewältigung großer Schwierigkeitsunterschiede erfordern hohe Begabung - Angst	BR ←--------	- lineare P./Prop. erheblich leichter als indirekte Proportionalität, insbesondere auch wegen —> - umgekehrte Proportionalität besonders schwierig - bei der Unterscheidung muß der Schüler "ohne Schema" entscheiden (d.h. diese Tätigkeit übersteigt den rechnerischen Bereich!)		
Sonstige Einflüsse		- Eltern stören		158			
Methodisch-didaktische Hinweise	Siehe Anmerkung 1	Siehe Anmerkung 2	Siehe Anmerkung 3		Siehe Anmerkung 4	Siehe Anmerkung 5	

GYMNASIUM:

Anmerkung 1:

- Begriff der Proportion vor allem durch den Physikunterricht aktuell halten
- immer wieder; viel mehr betonen
- auf den Schluß über die Einheit verzichten, um Proportionen zu verdeutlichen
- Verhältnisgleichungen nach Schreibweise mit Doppelpunkten auch (früh?) behandeln und als Verhältnisse identifizieren

Anmerkung 2:

- "glatte" Ergebnisse sind praxisfern (Motivationsabfall)
- "alter" Dreisatz besser
- einfache Merkregel "je mehr - desto mehr" etc., aber ihrem Mißverständnis durch geeignete Beispiele entgegenwirken
- Schwierigkeitsgrade wechseln
- Stoffe insgesamt nicht zu lange
- Spaltenschema, Wertetabellen
- oder

- Beispiele mischen, um vor unreflektierter Anwendung des Systems "Dreisatz" zu warnen - auch schon bei proportionalen Beispielen

Anmerkung 3:

- Taschenrechner, aktuelles Material
- Sachverhalte in Textaufgaben erklären, auch um Erfahrungslücken zu schließen

  → vor allem beim Lösen von Textaufgaben
- Textaufgaben (z.B. auf Arbeitsblättern) in Rahmenprogramme einkleiden, damit die Bearbeitung überhaupt begonnen wird
- Typisierungen

Anmerkung 4:

- nach Behandlung der linearen Proportion durch eine "Schockaufgabe" einführen; eine "indirekte Proportion" einfach rechnen lassen

Anmerkung 5:

- funktionale Zusammenhänge in Wort und Bild vor der rechnerischen Behandlung
- zuerst allgemeine Zuordnungen, dann erst Spezialisierungen
- in Klasse 9/10 auf Arbeitsblättern verschiedene Sachsituationen vorlegen. Die Abbildungsvorschriften heraussuchen lassen und typisieren

1.2.4 GESAMTSCHULE

GESAMTSCHULE

	Proportionalität	Dreisatz	Sachrechnen	Brüche/DZ	Proportionalität/Antiproport.	Funktion	Strahlensätze
Hauptgedanken	- Jüngere Schüler (bis Klasse 5) unvoreingenommen - später ein Reizwort, Signale - "belastete" Schüler denken ab Klasse 4/5 proportional, aber anders oder nicht - für Schüler eine "neue Rechenart"	- "Dreisatz" bis Abitur als Reizwort (ab Klasse 8)	- Interesse an Umweltphänomenen - Anspruch und Schwierigkeitsgrad verdecken Kalkülübung		- Verschachtelung		- erst nachdem in Klasse 9/10 Proportionen "nichtbar" wurden, waren Schüler bereit, mit Proportionen zu rechnen
Strategien							
algor. Asp.	- Eltern wählen Proportionalität auf Dreisatz ab - "Gleichung machen" erscheint als nicht plausibel	- schwächere Schüler wie "Kochrezept" - Eltern favorisieren Dreisatz	- meist mit direkter Proportionalität, ohne Überlegung; Häufigkeit wächst mit zunehmender Entfernung von der erstmaligen Durchnahme	- für Aufstellen der Proportionen wichtig			
numer. Asp.							
inf. vorstb. Aspekt			- "richtige" Paare finden schwer; "wild" kombiniert - Sprache in formale Anordnung übersetzen schwer, abhängig von IQ - für Textaufgaben sind den Schüler Lösungsstrategien "nicht gegeben"		- Erkennen der Unterscheidung schwer; von IQ abhängig		
Faßbarkeit allgemein	- gilt als schwer - bei "günstigen" Größen leicht, sonst schwer	- gilt als schwer - "Kochrezepte" bleiben 4-6 Wochen erhalten - durch 1x behandeln nicht im Bereich "verfügen"; Wiederholung in höherem Alter dringend nötig - erweiterte Dreisätze schwer	- Zinseszinsaufgaben schwer	- Fehlende Vorkenntnisse wirken demotivierend	- erweiterte Dreisätze schwer	- wechselnder Funktionsaspekt hilft in Klasse 9/10 beim Proportionsverständnis	
Alter	- bei Klasse 6 "unvoreingenommen" - mit höherem Alter das proportionale Denken lernen	- ab Klasse 9 - 11 "Dreisatz" schwer					
Sonstige Einflüsse	- Eltern	- Eltern					
Methodisch-didaktische Hinweise	Siehe Anmerkung 1	Siehe Anmerkung 2	Siehe Anmerkung 3		Siehe Anmerkung 4	Siehe Anmerkung 5	Siehe Anmerkung 6

GESAMTSCHULE:

Anmerkung 1:

- praktisch-physikalische Versuche zur Demonstration der Proportionalität; Meßreihen mit quer angelegten Tabellen; konstanter Quotient
- Taschenrechner als Untersuchungsinstrument für Wertetabellen gut geeignet
- Wiederholung der Sachverhalte in Klasse 9/10 dringend nötig
- wie können schwächere Schüler diese Vorstellungen erlangen??
- Proportionalität im Lehrplan später ansetzen: erst die Einzelteile, dann die Klammer, die alles durchdringt
- Störfaktor "Eltern"

Anmerkung 2:

- Begriff "Dreisatz" vermeiden um externe Beeinflussung zu vermeiden
- Weg über Kurztabelle

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & x \\ \hline \end{array} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{x} \rightarrow x =$$

und Gleichung bewährt; hohe Behaltensquote

- Einführung von Schema F für schwächere Schüler
- Behandlung "unsinniger" Aufgaben nach einer Einschleifphase

- Vom Dreisatz zur Zuordnung übergehen ("mathematisieren")
- Häufiges Wiederholen, geometrische Deutung
- möglichst in IN bleiben

Anmerkung 3:

- Textanalysen

  Auffinden nicht benötigter Angaben
- Hilfslosigkeit des Lehrers bei Textaufgaben
- Taschenrechner

Anmerkung 4:

- viele "Entscheidungsaufgaben", auch Scherzaufgaben

Anmerkung 5:

- Vorübungen zur Linearität, Übergang zur Einheit vor dem Dreisatz nötig
- so früh wie möglich einfließen lassen und graphische Darstellung wählen

Anmerkung 6:

- geometrische Deutung

1.3 ANTWORTBLÄTTER DER UMFRAGE (Abschriften)

1.3.1 HAUPTSCHULE

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 1

Wir wären weitaus eher bereit, bei der Curriculumentwicklung mitzuarbeiten, wenn wir die Schüler konkreter und auch langfristiger zu einem Thema beobachten könnten. Wir meinen, daß so unser Urteil im Rückblick leicht verfälscht wird und wir nur zu bereit sind, Pauschalurteile abzugeben.

Zu Beginn eines Schuljahres mit Beobachtungsaufträgen versehen, die über einen längeren Zeitraum laufen, (Möglichkeiten mehrere Ansatzmöglichkeiten parallel laufen zu lassen.) erscheint uns ergebnisreicher und wirklichkeitsnaher.

1) Verständnis des Textes.
2) Herauslösen der Aufgaben aus dem Sachzusammenhang.
3) Die Anschaulichkeit sollte an erster Stelle stehen.
4) Als positiv hat sich erwiesen:
   a) Ableitung der Relationen über die Mengenlehre,
   b) Exponentialrechnung wird anschaulicher, wenn man über Funktionen kommt (Wertetabellen, Graphen ...).
   c) Der Behandlung des Dreisatzes sollte eine intensive Erarbeitung der Gleichungslehre vorausgehen.
      (Operatoren sollten nicht überstrapaziert werden.)

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 2

Vor drei Jahren habe ich die Schlußrechnung mit Proportionen (Verhältnisgleichung) durchgeführt in einem G-Kurs (7./8. Klasse).

Den Schülern fiel der Umgang mit diesem Rechenverfahren leichter als die umständliche Dreisatzschreibweise. Aber nach Schulentlassung hatten die Schüler nach eigenen Berichten in der Berufsschule in diesem Bereich der Mathematik Schwierigkeiten, denn sie wurden gezwungen, sich auf das alte Dreisatzverfahren umzustellen - warum, ist mir auch nicht ganz begreiflich, denn sie waren im Berechnen vom Anfang der Schlußrechnung an relativ schnell und sicher mit der Verhältnisrechnung.

Ich bin wieder zu der alten Methode zurückgekehrt, um meinen Schülern in der Berufsschule nicht unnötig Schwierigkeiten zu bereiten.

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 3

Zu 1: Proportionen werden durchgenommen, besonders in den E-Kursen.
Große Schwierigkeiten in G-Kursen, weil für die Schüler bestimmte Proportionen zu abstrakt sind.
Einige Kollegen verzichten weitgehend auf Proportionen, weil kein langfristiger Lernerfolg zu sehen sei.

Zu 2: Lehrer suchen nach anderen Lösungsmöglichkeiten, die Aufgaben bildhaft, d. h. z. T. für den Schüler der Hauptschule durchschaubar erscheinen zu lassen.

Zu 3:
1. Lehrer, die dazu "gezwungen" werden, Mathematik zu unterrichten, sollten von Ihnen einfache verständliche Schriften zum Mathematik-Unterricht erhalten (z. B. Verläufe von Unterrichtsstunden, "Geometriehandreichungen" - in der Hauptschule oft vernachlässigt - usw.).

2. Das Institut sollte Mathematik-Schulbücher auch dahingehend überprüfen, ob es für einen o. a. Lehrer verständlich ist und unter Umständen Hilfen anbieten - verständliche Hilfen -,
verständlich für einen, der nach dem Abitur zwei andere Fächer studiert hat und nichts mehr mit Mathematik zu tun hatte.

Es ist sehr lobenswert aus unserer Sicht, daß endlich eine Schrift zur Verfügung gestellt werden soll. Hoffentlich ist sie auch praxisnah verfaßt und nicht so schulfern wie manche Schriften und Schulbücher des Herrn Dr. Andelfinger, der in bezug auf die Hauptschule sehr fernes Gedankentum verbreitet.

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 4

1) Leider habe ich noch nicht allzu große Erfahrungen, da ich erst seit 3 Jahren im Schuldienst bin.
Die größte Schwierigkeit bereitet der Bezug zur Realität. Für die meisten Schüler sind die Themen zu abstrakt.
Eine weitere Schwierigkeit besteht für die Schüler darin, aus Textaufgaben die gegebenen Werte herauszulösen.

2) Ich versuche den Bezug darzulegen und durch immer wiederkehrende Aufgaben das Erkennen der gegebenen Werte zu üben.

3) In den Mathematik-Büchern müßten mehr Übungsaufgaben gegeben sein - Erklärung der einzelnen Themen nicht nur über Mengenlehre.

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 5

Zu 1: Die Lernschwierigkeiten sind in fast allen Altersstufen die gleichen
- mangelnde Fähigkeit des logischen Denkens,
- schnell nachlassende Konzentrationsfähigkeit,
- häufig fehlende gezielte Arbeitshaltung.

Zu 2: Durch Verstärkung des Kopfrechnens, des formalen Rechnens, Durchschaubarmachung von Sachaufgaben, wiederholte Einführungsstunden und vermehrte Übung.
Deswegen entspricht auch nicht der Stoff dem Plan.

Zu 3: Für die Hauptschule weniger Wissenschaft in die Mathematik, sondern mehr Formelrechnen, Sachrechnen (mit Aufgaben, die der Wirklichkeit entsprechen, sinnvoll sind und für die Schüler transparent), Kopfrechnen und mit dem Taschenrechner zur Zeitersparnis.

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 6

1) In der Volksschule vor 1968 hatten die Schüler eine erweiterte Dreisatzaufgabe 5-1-7 mit den Einheiten 3-1-5 wirklich sehr viel zu schreiben. Das Rechnen wurde aber beherrscht!
Heute: Verhältnisgleichungen mit X auf algebraischer Basis, schon in Klasse 6 eingeführt, führen zu schnelleren Lösungen, aber häufig mit Rechenfehlern.
Ab Klasse 7/8 wird von mir der Taschenrechner eingesetzt. Aber auch das muß geübt werden!

2) In den Klassen 9/10 wird zwar wieder besser "gerechnet", aber das Problem muß gelöst werden!

3) Die Hauptschule, als die Schule der 30%igen Restanten, hat es schwer, Motivationen anzuwenden und Projekte durchzuführen.
Immer wieder: Didaktik im
Schreibe - Tempo!
Ende: Üben - üben - üben!!!

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 7

Zu 1: Viele Schüler begrüßen den Sachzusammenhang, in dem die meisten Aufgaben dieser Art stehen.

Schwierigkeiten:

a) Viele Schüler versuchen ein bestimmtes Schema auf sämtliche Aufgaben zu übertragen, ohne dabei auf den Inhalt der Aussagen zu achten.

b) Besonders am Anfang (6.-8.Schuljahr) werden proportionale und umgekehrt proportionale Zuordnungen verwechselt.

c) Obwohl der Text (Sachzusammenhang) zunächst positiv auffällt, bestehen größte Schwierigkeiten in der Textinterpretation (ungenaues Lesen).

d) Wird mit Bruchoperatoren gearbeitet, so werden Lücken in der Bruchrechnung offensichtlich.

Die Schwierigkeiten sind in den einzelnen Lerngruppen unserer Schule außerordentlich unterschiedlich. Manchen Klassen macht bereits das einfachste Zuordnungsmodell Schwierigkeiten; in anderen Klassen dagegen kann mit wenigen Einzelfällen der Unterrichtsstoff mit besten Erfolgen vermittelt werden.

Zu 2: Zu a: Schwierigkeiten werden nicht isoliert betrachtet.
An den Anfang setze ich meist eine ungeordnete, problemorientierte Lernsituation

Schüler von Anfang an zu flexiblerem Denken erziehen!

Zu b: Vor jeder Lösung einer Aufgabe wird das Ergebnis zunächst geschätzt.
Ohne zu rechnen sollen proportionale und umgekehrt proportionale Sachverhalte unterschieden werden, Aufgaben selbst gestellt werden.

Zu c: Training: Texte auf die notwendigsten Begriffe reduzieren. Texte in Schaubilder umformen, aus Schaubildern Texte formulieren.

Zu d: Wiederholung der Bruchrechnung ist unumgänglich, erscheint dem Schüler notwendig und damit auch sinnvoll.

Zu 3: Allgemein:

Umgekehrt proportionale Zuordnungen werden wesentlich schwerfälliger erkannt.
Dieser Unterrichtsstoff setzt eine Menge mathematische Erkenntnisse voraus.
Die neuen Mathematikbücher enthalten endlich lebensnahe, den Schüler ansprechende Aufgaben.
Leider werden die Bücher erst dann eingeführt, wenn sie bereits wieder veraltet sind.
Lehrer muß oft die in den Büchern genannten Preise durch aktuelle ersetzen.

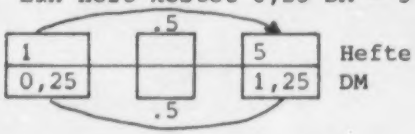
Ich halte diesen Themenbereich für äußerst wichtig, da Aufgaben dieser Art jeder Schüler im späteren Leben lösen muß.

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 8

1) Durch Denkschwierigkeiten besteht zu jedem Thema die Schwierigkeit, Zahlen aus dem Text einer bestimmten Formel zuzuordnen (verwechselt werden Grundmenge und Teilmenge).

   Ein Schema kann nur dann angewendet werden, wenn die Bedingungen immer gleich bleiben.

2) Schema: Beispiel 1:
   Ein Heft kostet 0,25 DM - 5 Hefte?



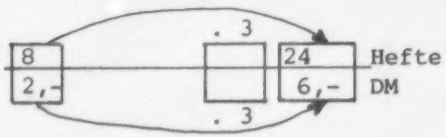
   Beispiel 2:
   3 Hefte 0,75 DM - 7 Hefte?

3	: 3	1	. 7	7	Hefte
0,75	: 3	0,25	. 7	1,75	DM

   Beispiel 3:
   Für 2,- DM bekommt man 8 Hefte. -
   Für 6,- DM?

8	: 8	1	. 24	24	Hefte
2,-	: 8	0,25	. 24	6,-	DM

   oder



Dieses Schema läßt sich auch für Aufgaben mit umgekehrten Schluß anwenden.

3 Arbeiter brauchen 24 Tage - 4 Arbeiter?

3	:3	1	.4	4	Arbeiter
24	.3	8	:4	18	Tage

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 9

Es fällt den Schülern vor allem schwer, proportionale von umgekehrt proportionalen Aufgaben zu unterscheiden. Aufgaben dieser Art auszurechnen bereitet weniger Schwierigkeiten, nachdem sie herausgefunden haben, ob es sich um proportionale oder antiprop. Verhalten handelt. Aus diesem Grunde erhalten sie eine Fülle von gemischten Aufgaben (nicht sortiert), bei denen sie nur entscheiden sollen, ob prop. oder nicht.
Einige dieser Aufgaben werden dann zuhause ausgerechnet.

Sachrechnen allgemein bereitet den Schülern Schwierigkeiten, weil sie bei komplizierter formulierten Aufgaben zunächst mindestens eine halbe Stunde damit beschäftigt sind, den Sinn zu erfassen. Hier muß man dann häufig die Aufgabe in Einzelinformationen zerlegen und neu formulieren lassen.

Auf funktionale Deutung von "Dreisatzaufgaben" lege ich weniger großen Wert. Meiner Meinung nach reicht es, wenn die Schüler wissen, daß man prop. und umgekehrt prop. als Graph darstellen kann und auch entsprechende Werte ablesen kann.
Ich sehe Aufgaben dieser Art - ebenso wie funktionale Betrachtungen von Flächeninhalten - als Möglichkeiten, den Funktionsbegriff zu wiederholen und zu vertiefen. Ansonsten bin ich der Meinung, daß eine zu umfassende Betonung der funktionalen Deutung die Schüler verwirrt und keine direkte Hilfe zur Lösung von Dreisatzaufgaben bietet. Ich habe bisher auch nicht festgestellt, daß die Aufgaben für die Schüler anschaulicher werden.

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: HS 10

1) Grundkurs, 8. und 9. Schuljahr, zeigen beim einfachen Dreisatz im Aufstellen des Ansatzes kaum Schwierigkeiten.
Erst der Lösungsweg - Schluß auf 1 - ist vornehmlich für Schüler des G-Kurses - schwierig!

2) Ich versuche, immer wieder vom Text her die Anschauung zu unterstreichen, um so den Denkschritt zu erleichtern.

3) Um auch dem weniger begabten Schüler das Problem zu erleichtern, wären Übungsstunden, bzw. Stoffbeschränkung im Plan dienlich.
Aber spätere Anforderungen schrecken uns!!

Schulform: Hauptschule
Lfd. Nr.: 11

Zu 1: Ich arbeite seit Klasse 5 mit Griesel "Welt der Mathematik", bei dem grundlegender methodischer Leitfaden für alle Problemkreise um "Proportionalität" das Operatormodell ist.

Schwierigkeiten:

- Lange Vorbereitungsphasen mit operatorischen Übungen, z. B. im Vorfeld der Prozentrechnung, sind oft schwer zu motivieren.
- Psych. Problem:
  Schüler haben nicht den Eindruck (oder besser: nicht in genügendem Maße), Lernfortschritte zu machen, kann auch zum psych. Problem für Lehrer werden, wenn z. B. Parallelklassen "schon viel weiter" sind!
- Druck aus dem Elternhaus:
  Eltern wissen für einfache Aufgaben oft vermeintlich leichtere Lösungen ("Rezepte") nach dem Motto: "Das haben wir früher aber viel einfacher gerechnet".
  Schüler nehmen solche "Rezepte" begeistert auf und verstehen nun umso weniger, warum man von ihnen so schwierige Überlegungen wie die Deutung funktionaler Zusammenhänge erwartet.
  Ich kann dann auch oft nur für die Schüler wenig einsichtige Gründe für mein Vorgehen angeben.
- Größte Probleme für die Schüler:
  Eben dieses Denken in funktionalen Zusammenhängen sowie das Herauslösen von math. Strukturen aus sprachlich beschriebenen Sachsituationen (hier habe ich gelegentlich den

Eindruck, daß hier auch sprachliche Probleme im Weg stehen, finde aber nicht immer bildhafte adäquate Übersetzungen in Situationsskizzen o. ä.).

- Am Ende von Klasse 7 und jetzt verstärkt in Klasse 8 (E-Kurs) beginnt sich die mühsame (Denk-) Arbeit auszuzahlen (im Bewußtsein der Schüler!):
  Schüler begreifen - im Nachhinein -, daß scheinbar völlig getrennte Problembereiche der Mathematik in einem übergeordneten Strukturzusammenhang stehen und beziehen aus dieser Erkenntnis enorme Hilfen für das Verständnis neuer Probleme.
  (Ich weiß allerdings nicht, ob man diese positive Aussage auch für Schüler des Grundkurses so treffen könnte. Hier habe ich eher Zweifel.)

Zu 2:
- Unendliche Geduld.
- Viel Arbeitsmaterial/Anschauungsmaterial, auch noch in Klasse 7 (führt bei mangelnder Motivation auch manchmal zu blindem Aktivismus!).
- Versuche - auch gegen den Widerstand der Schüler - Probleme von möglichst vielen Seiten zu beleuchten und verschiedene Lösungswege aufzuzeigen.
- Versuche, mich nicht selbst unter Zeitzwang und "Lernerfolgs"-Zwang zu setzen (Erkenntnis braucht Zeit, Auswendiglernen geht schneller).

Zu 3:
- Als hilfreich erwiesen hat sich ein Elternseminar im Rahmen der Zusammenarbeit zwischen Schule und Elternhaus (hier: Klassenpflegschaft; in einem anderen Zusammenhang werden

an unserer Schule z. Z. auch jahrgangsumfassende Organisationsformen erprobt):
Eltern werden - soweit möglich - über didaktische Probleme und methodische Möglichkeiten informiert und zu - verständnisvoller - Zurückhaltung angeleitet.

1.3.2 REALSCHULE

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 1

Kommentierungen von Einzelstunden nicht enthalten; allgemeine, spontane Gedächtnisniederschrift:

1) Verhalten, Lernschwierigkeiten, Einstellungen der Schüler:

   a) Bei der Einführung des Themas Unverständnis dem mathematischen Background gegenüber - es ist halt so! (Kl. 7)

   b) Größenpaare in beiden Formen (prop./antiprop.) mit graphischer Darstellungsweise sowie tabellarisch sachrechnerisch positiv, verallgemeinernder Lösungsweg einer Aufg. wegen mangelnder Kenntnis im Gleichungsumformen schwierig (Kl.7).

   c) In Prozent- wie Zinsrechnung Einführung und Behandlung über Proportionen positiv, Behaltenswert negativ (jedoch relativ schnell wieder verfügbar).
   Aufgabenformulierung nach Vaters Methode sowie Rechenweg für Ermittlung des Prozentwertes bleibt eher haften, jedoch Grundwert wie Prozentsatz im Vergleich noch weniger.

   d) Bei diesem Bereich (s. 1 c) besonders:
   - Mein Vater hat ...,
   - Auch Schwierigkeiten mit Schülerhilfen,
   - Verwirrung des Schülers durch unterschiedliches methodisches Vorgehen.

   e) In Klasse 9, bei zentr. Streckungen z. B.,
   - wird der rechnerische Weg akzeptiert,
   - der Transfer in die geometrische Darstellung,
   - das Erkennen der Zusammenhänge bereitet Schwierigkeiten,

   wobei letzteres an der Oberfläche bleibt.

52

f) Bei Anwendungsaufg. aus dem täglichen Bereich verstärkte Mitarbeit:
Etwa die Höhe eines Kirchturmes mit Bleistift, Lineal, Blatt Papier ermitteln (Strahlensätze Kl. 9).

g) Für mathematisch einigermaßen begabte Schüler insgesamt erfolgreiche Arbeit mit Proportionen, auch an Textaufg., möglich;
schwächere Schüler scheitern schon an der Vielzahl der Zahlen, deren Zusammenhang, zeigen Widerwillen bei Denkanstößen (Thema z. T. zu abstrakt).
Formeln können eher gepaukt werden, ebenso Merksätze, nach denen man dann mechanisch vorgeht; ist dieses nicht möglich, schon bei kleinsten Abweichungen Scheitern vorprogrammiert. -
Die Proportionalität erfordert Erkenner einer Struktur in Sachverhalten und Einblick in Relationen in Zahlenmengen.

2) Selber:

a) Systematischer Aufbau, von 7 an.
Problematik muß bis 10 vertraut sein.

b) Gleichungsformungen;
vorrangig, wiederholend.

c) Reduzierung auf für Schüler akzeptable Lösungsstrategien (nicht mehr Strategie als Lösung) - Rahmenrichtlinien Mathematik RS S. 69 Negativbeispiel -.
Lösungsstrategien:
- Entwickelbar
- Nachvollziehbar.

d) Vielfalt und Vielzahl von Aufgabentypen für folgenden Schülertyp:
- Morgens kapiert, zu Hause negiert.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 2

1. Ein großer Teil meiner Schüler zeigt sich an Sachrechenaufgaben wenig interessiert.

2. Das Auflösen des Textes in einen mathematischen Ausdruck fällt den Schülern besonders schwer.

3. Die Unterscheidung in proportionale und anti-proportionale Beziehungen ist für viele Schüler sehr schwierig.

1. Die Schüler greifen diesen Problemkreis auch später nur relativ ungerne wieder auf.

5. Begegnungsmöglichkeiten
   Die Schüler sollten nach Möglichkeit selber leicht zu merkende Unterscheidungskriterien formulieren.
   Sie sollten sich selber ein "Kochrezept", einen "Ablaufplan" etc. erstellen, mit dem sie solche Aufgaben durchlaufen können.
   Die Aufgaben sollten für die Schüler "spannender" sein.

- Übung notwendig, kommt zu kurz.
- Übungsaufgaben für zu Hause werden gründlich vorbereitet, um Effekt zu erhöhen.

e) Elternarbeit.
Lösungswege des Schülers von nicht eigenen, elterlichen abkoppeln.
Gerade bei diesem Bereich Störungen erheblich durch Eingriffe von außen.

f) Ausweichen auf Formel- und Merksatzmathematik.

3) Vorschläge:

a) Da offenbar allgem. mathem. Nichtbegabung in hohem Prozentsatz (27 % d. Schüler beurteilen das Fach als "sehr schwach" bei sich) 1 Stunde mehr auf der Stundentafel.

b) Kein Lehrerwechsel 7-10, Empfehlung.
Schwerpunkte werden gesetzt,
verbale Vertrautheit.

c) Absprachen unter den Fachkollegen, da möglichst gleichrangige Gewichtung und Behandlung bei Klassenübernahme von Vorteil.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 3

Als Fachlehrer für Mathematik unterrichte ich seit Jahren nur in den Klassen 8, 9, 10 (z. Zt. 1x8, 2x9, 1x10.).

Der Themenbereich Ihrer Umfrage betrifft bei uns weitgehend die Klasse 7 (RS).

1) Im ersten Halbjahr der Klasse 10 wiederhole ich regelmäßig den Themenbereich - entgegen den Richtlinien - mit Hinblick auf die Aufnahmeprüfungen, meist einmal wöchentlich. Mehrfach wurde ich hier auch schon um zusätzliche Übungsstunden gebeten. Das Interesse ist sehr groß - die Kenntnisse minimal, was sich aber meist in wenigen Übungsstunden beheben läßt.

2) Durch Übung, besonders von Textaufgaben in Kl. 10. Weiterhin lasse ich mir zu diesem Zweck Aufgaben aus Aufnahmeprüfungen benennen.

3) Für viele Schüler in Klasse 10 sind viele Aufgaben in Aufnahmeprüfungen zu Ihrem Themenbereich bei reiner Beachtung der Richtlinien kaum lösbar. Daher sollten die Richtlinien oder die Aufgaben in Aufnahmeprüfungen geändert werden!

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 4

1) Schüler kennen "Dreisatzprobleme" aus alltäglichen Erfahrungen und lösen diese - soweit "einfache" Zahlenwerte vorliegen - eher intuitiv.
Dies erschwert eine Analyse der Zusammenhänge und ihre Übertragung bzw. Anwendung auf "schwierigere Aufgaben".

In Klasse 7 sind bei der Einführung proportionaler bzw. antiproportionaler Zuordnungen den Schülern Produkt- und Verhältnisgleichungen sowie die notwendigen Umformungen zu deren Lösung noch nicht bekannt. Gleichwohl werden sie in Lehrbüchern als Lösungsweg angeboten.

2) Durch Vorgabe von "komplizierten" Zahlenwerten Zwang zur Analyse der zugrundeliegenden Zusammenhänge.

Entwicklung einer allgemeinen, in jedem Fall durchführbaren Lösungsstrategie (z. B. Flußdiagramm als Handlungsanweisung).

Aber: Exakte Begründung, warum dieses Verfahren anwendbar ist, muß von den Schülern nachvollzogen und verstanden werden (Verstehen und Anwendung i. S. von Bloom).

3) Evtl. zuerst Gleichungslehre, dann proportionale Zuordnungen?!

Hinweis auf Strukturgleichheit:
- Kürzen und Erweitern von Brüchen.
- Verwandlung von quotientengleichen Zahlenpaaren.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 5

Zu I:

a) Meiner Erfahrung nach ist gerade beim Thema "Größenpaare/Dreisatz" eine sich negativ auswirkende Einflußnahme dritter Personen (wie Eltern und Geschwister) zu beobachten. Das reicht von einem ablehenden "Oh, nein!" bei der Bekanntgabe des neuen Themas bis zu resignierenden Schüleräußerungen, wenn solche Personen im Verlauf der Unterrichtsarbeiten helfend einzugreifen versuchen und dabei den Schülern weitere Systeme (oftmals nur Rechentechniken) vermitteln, die mit den im Unterricht auftretenden nicht übereinstimmen und naturgemäß von den betroffenen Schülern als neues Lernhemmnis gewertet werden.

b) Neben solchen außerfachlichen Schwierigkeiten sind natürlich hinsichtlich der anstehenden Rechenverfahren die Probleme des Rechnens mit Bruch- und Dezimalzahlen stets vorhanden.
In der Hauptsache liegt die innerfachliche Schwierigkeit für die Schüler wohl darin, bestimmte Sachsituationen (evtl. in Textaufgaben angesprochen) bereits vorhandenen Zuordnungstypen und damit verbundenen Rechenverfahren anzupassen; für Lehrer wäre das Ziel also, diese Zuordnung ohne verständnislosen Drill zu realisieren.

Zu II:

a) Abhilfe in diesem Punkt ist, wenn überhaupt, nur langfristig über ständige "Beratung" (etwa der Eltern) zu erreichen.

b) Im Hinblick auf die Probleme der Rechentechnik könnte eine vorgeschaltete Einheit zur Wiederholung des Rechnens mit Bruch- und Dezimalzahlen speziell zum Bereich der Multiplikation und Division Abhilfe schaffen.

Zum zweiten Punkt könnte es hilfreich sein, etwa zu jeder konkreten Textaufgabe, die in Frage stehende Zuordnung zu ermitteln und vorab zu klären, unter welchen Voraussetzungen eine festgestellte Eigenschaft wegfallen würde oder auf welchen Bedingungen eben diese beruht.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 6

1) Die Aufgaben sind bei den Schülern unbeliebt, weil sie nicht immer leicht durchschaubar sind, zumal wenn es sich um Textaufgaben handelt. Die Schüler suchen ein Rechenschema.

2) Ich versuche an Hand von praktischen Sachaufgaben den Unterschied zwischen direktem und indirektem Dreisatz (Proportionen und umgekehrten Proportionen) deutlich zu machen, schreibe Bedingungs- und Fragesatz an, um dann den Bruchstrich zur Lösung aufzustellen.

a) 3 Äpfel kosten 2,40 DM
7 Äpfel kosten X DM

$$X = \frac{2{,}40 \cdot 7}{3}$$

b) 2 Arbeiter brauchen 4 Tage
8 Arbeiter brauchen X Tage

$$X = \frac{4 \cdot 2}{8}$$

3) Die Aufgaben ließen sich im Koordinatensystem graphisch darstellen, um den Unterschied deutlich zu erkennen.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 7

1) Proportionalität und Antiproportionalität nur als Dreisatz und graph. Darstellung im Koordinatensystem.
Bruchoperator ausprobiert, Dreisatz logischer, bei Produktgleichung fehlt Möglichkeit der Äquivalenzumformung.

Zinseszins, Wahrscheinlichkeit, Statistik kommen im Augenblick in den Klassen 7-10 kaum vor.

Ähnlichkeit und Strahlensätze mit Verhältnisgleichungen.
Zinsrechnung mit Dreisatz und Äquivalenzumformung.

Schwierigkeiten:
- Unterscheidung: Proportionalität - Antiproportionalität.
- Umwandlung von Texten in mathem. Angaben (bei allen Arten von Textaufgaben).

2) Bei Unterscheidung von Antiproportionalität und Proportionalität abschätzen des Ergebnisses. Nicht nur mechan. Rechnen, sondern auch logisches Denken (z.B.: Ein Arbeiter verdient im Monat 100.000,- DM!!).

Möglichst viel Textaufgaben rechnen.
In den Schulbüchern sind meist zuwenig davon.

3) In den Schulbüchern mehrere Rechenverfahren anbieten (falls möglich), mehr (Text)aufgaben.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 8

1) - Große Schwierigkeiten beim systematischen Umgang mit Größen.
- Kritikloses Hinnehmen von Ergebnissen (insbesondere vom Taschenrechnen).
- Kein Überschlag.
- Mangelndes Vorstellungsvermögen.
- Schwierigkeiten:
  a) Beim Verständnis der Aufgabe (Was ist gesucht)
  b) Bei der mathematischen Darstellung.
- Die wenigsten Schüler sehen den allgemeinen Zusammenhang. Jede Anwendung der "Proportion" erscheint als separates Gebiet.

2) Ü b e n !!!
Bei jeder Anwendung den Begriff der Proportion deutlich werden lassen.
Immer wieder Verbindungen herstellen zu Bekanntem (auch länger Zurückliegendem), um den Zusammenhang zu klären.

3) Auch in den verschiedenen Aufgabenstellungen bzw. Anwendungen schon den Oberbegriff der Proportion einfließen zu lassen.

Wünschenswert wären mehr Aufgaben aus der Wirklichkeitsnähe der Schüler.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 9

Zu 1: In meinem Unterricht wird die Schlußrechnung (Dreisatz) als Propädeutik der Funktionenlehre behandelt.

Folgende Gründe kann ich dafür anführen:

1. Der Dreisatz ist meiner Meinung nach ein unlogisches Vorgehen. Er wird daher den Schülern nicht gerecht.
2. Der Dreisatz ist meiner Meinung nach nicht geeignet, eine Struktur des Faches Mathematik aufzuzeigen.
3. Insbesondere bei Textaufgaben zeigt sich, daß die Schüler den Dreisatz auf konkrete Sachverhalte nicht anwenden können.

Zu 2:
- Funktionale Deutung der Schlußrechnung.
- Propädeutik der Funktions- und Relationslehre (Zuordnungsbegriff).
- Quotientengleiche Größenpaare: Prop. Zuordnung
  Produktgleicher Größenpaare: Antiprop. Zuordnung
- Vielfältige Darstellung von Zuordnungen (Tabelle, Pfeildiagramm, Nomogramm, Graphen).

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 10

Zu 1: Das "Dreisatzdenken" ist bei Schülern stark verbreitet (Hilfe durch Eltern!) und schwer durch andere Darstellungsweisen zu ersetzen.

Zu 2: Ich versuche, klare und möglichst einfache Schreibweisen zu verwenden, um die Vorteile einer Methode zur Wirkung kommen zu lassen.

Es entsteht leicht Verwirrung bei den Schülern dadurch, daß mehrere Lösungsverfahren gleichzeitig angeboten werden.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 11

Den Dreisatz verstanden meine Schüler früher schneller, da er - wie ich meine - praxisgebundener und dadurch mathematisch einfacher zu verstehen ist, besonders der umgekehrte Dreisatz.

Seit einigen Jahren unterrichte ich fast ausschließlich mit Proportionen /Antiproport. Ich muß sagen, am Anfang brauche ich viele, einfache Beispiele, um ihnen diese Art verständlich zu machen (Kl. 6/7). In den höheren Klassen macht dann die Proportionalität gar keine Schwierigkeiten mehr. Es geht sogar viel leichter als früher. Die Schüler wenden sie gern und selbstverständlich an.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 12

1. Die Einführung der Verhältnisgleichungen im 7. Schuljahr stieß z. T. auf Ablehnung bei den Schülern, wohl teilweise deshalb, "weil Vater mir das ganz anders erklärt hat und das viel einfacher ist" und vielleicht auch deshalb, weil es dem Schüler einfacher fällt, von der Vielheit auf die Einheit und dann wieder auf die Vielheit zu schließen, als sich den relativ schwierigen Begriff Verhältnis" vorzustellen; zumal da auch die Lösung einer Verhältnisgleichung sehr abstrakt vor sich geht und die Mittel dazu (Gleichungslehre) noch nicht ausreichend bekannt sind.

   Schülern des 9. Schuljahres machte es bisher immer große Schwierigkeiten, sich unter dem Seitenverhältnis in einem Steigdreieck genau die Steigung m vorzustellen, was wohl aber auch damit zusammenhing, daß sie an dieser Stelle zum ersten Mal mit dem "math." Verhältnis konfrontiert wurden.

   Schüler des 10. Schuljahres nehmen dann die Verhältnisgleichung zur Lösung von Sachrechenaufgaben gerne an, es sei denn, die alte "Dreisatzmethode" sitzt noch sehr tief.

2. Ich versuche schon recht früh und "unmathematisch" (Ende des 6. Schuljahres) Regeln für das Lösen von Gleichungen aufzustellen. Dabei versuche ich Begriffe wie Umkehroperation und überhaupt Herleitung über Operatormodelle zu vermeiden, weil sie meines Erachtens die Kinder überfordern.

3. Meines Erachtens liegt überhaupt eine Hauptschwierigkeit für die Schüler darin, daß sie sich beim Lösen mathematischer Probleme nicht auf eine Denkweise konzentrieren können: Entweder anschaulich (Dreisatz) oder mehr abstrakt mathematisch (Verhältnisgleichung)!
Ähnliches gilt auch für die Einführung der Bruchrechnung. Nicht nur in einem Schulbuch, sondern sogar in einem ganzen Land sollte man sich aber auf eine Methode einigen.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 13

1) Einführung einer Zuordnungstabelle im Zusammenhang mit der Aufgabe (z.B.)

$\frac{3}{5}$ von 1 h

1 h	62 min.
$\frac{1}{5}$ h	12 min.
$\frac{3}{5}$	36 min.

bereits in Klasse 5 leicht möglich.

Die Art der Zuordnung wird konsequent beibehalten.

In Klasse 6: Proportionale Zuordnung bedeutet gleiche Operation in Vor- und Nachbereich.

Der Dreisatz wird einbezogen. Die Zwischengröße ist zunächst möglichst nicht die "1", sondern der gg T.
Antiproportionale Zuordnung mit Gegenoperator.
Unterscheidung der Zuordnungen bleibt schwierig wie bei der traditionellen Form des Dreisatzes (Intelligenzsache).

Anfang Klasse 7 wird der Rechenstab zunächst als reine "Zuordnungsmaschine" benutzt.
(Wichtig für das Überschlagen der Größenordnung)
Auch die Prozentrechnung wird zunächst konsequent als proportionale Zuordnung behandelt, mit und ohne Rechenstab.
Dann erst entwickeln sich aus der Zuordnung mechanische Rechenverfahren. Quotientengleichung oder Proportion, Produktgleichung evtl. Formeln.

Das Verfahren, Dreisatz in der proportionalen oder antiproportionalen Zuordnung vereinfacht den sogenannten zusammengesetzten Dreisatz.

Anz. d. Arb.	Y	Arbeit (m^2)

Eine Größe bleibt zunächst invariant, (wird) einfach abgedeckt - danach die andere.

So könnte Zinsrechnung ohne Äquivalenzumformung in Klasse 7 behandelt werden.
Aber sollte man die nicht besser als eine praktische Anwendung der Gleichungslehre behandeln?

Bis einschließlich Klasse 8 sollte der Themenkreis auf anschauliche Größen beschränkt werden.

Parallel zu den Themen der Geometrie (Ähnlichkeit, Strahlensätze) muß dann aber eine gründliche "Algebraisierung" durchgeführt werden.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: RS 14

Zu 1: Das größte Problem des angesprochenen Themenbereichs liegt meines Erachtens darin, daß es sich hier um Texte, um Sachaufgaben handelt, daß die Schüler nicht sofort gelernte Operationen anwenden können.
Man ist zu wenig trainiert, Anweisungen genau lesen zu müssen; man hat es auch oft versäumt, die Schüler zu eigenem Erarbeiten zu bringen - der Lehrer hilft zu viel.

Daneben steht natürlich, daß man zu lange Techniken einübt, daß man die Mathematik als Wissenschaft für sich sieht und nicht durch die Funktion, mit den Zahlen die Umwelt durchschaubar zu machen. - Manche Sachaufgaben durchleuchten zwar die Umwelt, sollten aber nicht nur so alleine stehen und als eigener Bereich - sondern auch beim Einüben der Rechentechnik den Schülern immer wieder verständlich machen, warum sie dieses oder jenes lernen und üben sollten.

Zu 2: Der Antipathie der Schüler gegen "Proportionalitäten" kann ich als Lehrer nur mit Gelassenheit begegnen - die Sachaufgaben in allen Klassen der S I müssen möglichst mit vielen Skizzen, durch Vereinfachung der Zahlen, gelöst werden.

Gerade die Veranschaulichung von Lösungswegen hilft schwächeren Schülern (nur fühle ich mich mit unserem eingeführten Unterrichtswerk da alleine gelassen) und greife oft auf meine alten Hauptschulbücher für die Unterstufe zurück.

Ich bemühe mich, Sachaufgaben immer wieder aus ihrer Stellung am Ende eines Themas herauszulösen - nur oft vergesse ich es auch.

Zu 3: Ich suche ein Unterrichtswerk, das eine geschickte Lösung findet, diesen Bereich "Proportionalität" als Angstthema für Schüler und Lehrer (?) herauszunehmen - sicher gibt es da schon einige bessere als unser eingeführtes Schulbuch.

Schulform: Realschule
Lfd. Nr.: PS 15

Das Sachgebiet (Dreisatz und Proportionen) ist für die Realschule (erst recht für die Hauptschule) der wichtigste Teil der Mathematik. Das logische Schließen (Wenn-dann-Beziehung) ist der Teil der Mathematik, der nach der Schulzeit von jedermann gebraucht wird.

Andere Sachgebiete (Termumformungen, Lösen von Gleichungen usw.) sind später nur für Spezialisten wichtig.

Die Schwierigkeiten im Unterricht liegen darin, daß das Sachgebiet in zu vielen Formen angeboten wird (siehe ersten Abschnitt der vorigen Seite) ohne daß der Zusammenhang immer deutlich genug wird.

Wenn als Hauptziel der Mathematik die Schulung des logischen Denkens angesehen wird, ist der Dreisatz (Schließen von der Vielheit über die Einheit zur Vielheit) die effektivste Methode. Lehrer und Schüler sind jedoch zu sehr geneigt, den Stoff formelmäßig (Zinsformel, Proportionsgleichung) abzuhandeln. Dadurch wird der Stoff zwar leichter (und man wird schneller damit fertig) aber auch schematischer.

Für mich ist die Behandlung des Stoffes ebenso ein sprachliches wie ein mathematisches Problem.
Ich lasse verhältnismäßig ausführliche Sätze bilden (aber nicht schreiben)

z. B.: 2 Std. - 60 km/h
3 Std. - X km/h.

"Wenn man nach 2 Std. am Ziel sein will, dann fährt man mit 60 km/h.

Wenn man statt nach 2 Std. bereits nach einer Stunde am Ziel sein will, dann muß die Geschwindigkeit

zweimal so groß sein.
Wenn man statt nach einer Stunde erst nach 3 Std. am Ziel sein muß, braucht man nur den dritten Teil der Geschwindigkeit."

Ich hoffe, Ihnen mit diesen Ausführungen gedient zu haben.

1.3.3 GYMNASIUM

204

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 1

Zu 1:
- Schwierigkeiten beim Verständnis der Begriffe Proportionalität.
- Größenpaare und funktionale Darstellung machen den Schülern Spaß. - Veranschaulichung für schwächere Schüler.
- Umsetzung von Sachaufgaben (Textaufgaben) in math. Sprechweise.

Zu 2. Schwierigkeiten bei der Begriffsbildung - lange Motivationsphase mit den verschiedenartigen Problemstellungen.

Graphische Darstellung von Gemeinsamkeiten.

- Sachaufgaben: Bereitstellen von Schemata für die Übersetzung von Textaufgaben.

Zu 3: Versuch der anschaulichen Fassung von Definitionen.
- oft zu theor. Darstellung in Lehrbüchern.
- altersorientiertere Beispiele
- der Proportionalität sollte mehr Bedeutung zugemessen werden (Grund: einmal bereitgestellte Schemata können bei anderen verwandten Sachproblemen abgerufen werden.

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 2

ad 1) a) Verwechslung: Prop. ⟷ umgekehrte Prop.; daraus
resultierend: Probleme der Ansatzfindung

b) allgemeine Abneigung gegen Textaufgaben aufgrund der besonderen Schwierigkeiten der Umsetzung in die Form der Gleichung (o. ä.)

c) vollkommen unkritische Einstellung gegenüber nichtproportionalen Zusammenhängen (Bsp.: 2 Eier sind in 5 Minuten hart gekocht; 4 Eier ??).

ad 2) zu a) mathematisch nicht exakte, aber eingängige Überlegungen

wie je mehr - desto mehr
bzw. je mehr - desto weniger.

zu b) möglichst naheliegende Beispiele, für Schüler interessante Probleme.

ad 3) Einbeziehung der Begriffe "quotientengleich" bzw. "produktgleich".

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 3

Zu 1: In Klasse 8:
Bei der Behandlung von Textaufgaben, die früher mit Dreisatz gelöst wurden, fällt es vielen Schülern schwer, zu entscheiden, ob es sich um produkt- oder quotientengleiche Zahlenpaare handelt.

Bei der Behandlung der direkten Proportionalität und der linearen Funktionen tauchen erheblich weniger Probleme auf als bei der indirekten Proportionalität (Hyperbel), insbesondere auch wegen der Bruchrechnung.

In Klasse 9:
Bei der Behandlung der Strahlensätze ist für viele Schüler die Schreibweise mit Doppelpunkt

$(\overline{ZA'} : \overline{ZA}$ anstatt $\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}})$

hinderlich beim Lösen von Aufgaben.

Auch eine Gleichung $\overline{ZA'} : \overline{ZA} = 2$ löst Verwunderung aus, da auf der rechten Seite "kein Verhältnis" steht.

Zu 2: Bei der Lösung von Textaufgaben sind einfache Merkregeln hilfreich ("je mehr, desto mehr; je weniger, desto mehr"), die leider viel zu häufig in Schulbüchern fehlen. Sonst siehe PM Jg. 22, Heft 11, S. 325-335.

Allgemein kann gesagt werden, daß die Schüler zwar Interesse an den Aufgaben zeigen, die behandelt werden können, jedoch durch ihre Abneigung gegen Bruchrechnen von den eigentlichen Problemen abgelenkt werden.

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 4

Zu 1: Schüler der Klasse 7 lösen leicht und gern - fast spielerisch - einfache Dreisatzaufgaben, d.h. solche mit einfachen Zahlenwerten.
Für nicht sofort überschaubare Aufgaben brauchen sie ein Lösungsschema, das einige Schüler sogar mit Erfolg anwenden, ohne es selbst zu verstehen.
Praktikabel ist das Spaltenschema mit der Regel: Auf beiden Seiten ist derselbe Operator anzuwenden (bzw. der Gegenoperator bei der umgekehrten Proportionalität).

Das Zeichnen der Graphen sehen die Schüler meist als lästige Zugabe an; denn auch die Geraden beim proport. Verhältnis werden stur mit Hilfe von umfangreichen Wertetabellen gezeichnet, obwohl sie andererseits zur Ermittlung von Größenpaaren benutzt werden.
(Vielleicht müssen die Schüler wirklich 50mal kontrollieren, bevor sie glauben=wissen, daß da eine Gerade 'rauskommt'.)

Die Frage nach der Art der Proportionalität bildet bei jeder Aufgabe die größte Schwierigkeit. Da muß der Schüler - ohne Hilfe eines Schemas - selbst entscheiden. Dabei läßt er sich sogar von der Aufgabenformulierung in Verwirrung bringen.

Zu 2: Im Vergleich zu anderen Inhalten dieser Altersstufe: Aufgeschlossen.

Zu 3: Ich werde einmal über Proportionen den Einstieg in die Algebra (d.h. die Termumformungen) probieren.

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 5

Zu 1: Der Unterricht im Bereich "Proportionalität" kann meiner Meinung nach sehr praxisorientiert sein. Geht man auch so vor, gelingt es meist, die Schüler so zu motivieren, daß ihr Interesse über einen größeren Zeitraum hinweg nachgehalten werden kann.
Schwierigkeiten ergeben sich da, wo verschiedenste Zuordnungen vorliegen und eine Einordnung "proportional", "antiproportional" oder "weder-noch" vorgenommen werden soll.

Zu 2: Allgemeine Zuordnungen werden untersucht ohne frühzeitige Beschränkung auf proportionale. Lösungsschemata werden erst recht spät eingeführt.
Viele Übungen sind notwendig.

Zu 3: Viele Aufgaben in den Schulbüchern sind für Schüler uninteressant.

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 6

ad 1) Da ich erst sehr kurze Zeit (ca. 1 Jahr) im Schuldienst bin und zudem noch keine Unterrichtsreihe zum Thema "Proportionalität" durchgeführt habe, kann ich Ihnen keine praktischen Erfahrungen aus dem Bereich der Unterstufe dazu mitteilen.
Ich habe allerdings in einer 9. Klasse sowie in zwei 11-Grundkursen im Rahmen der Behandlung "Lineare Funktionen" bzw. "Funktionsbegriff" die direkte Proportionalität mitaufgegriffen und vor allem in der Mittelstufenklasse mehrere Anwendungsaufgaben behandelt.

Dabei zeigt sich, daß

1. in beiden Stufen die Grundkenntnisse (Formelwissen) weitgehend vergessen worden waren. In der 9. Klasse waren von 29 Schülern überhaupt nur 2 in der Lage einfachste Aufgaben der Art "Wieviel sind 5 % von 60 DM?" zu bearbeiten;

2. Darstellungen im Koordinatensystem bzw. Paarschreibweise (Relationsbegriff) bei der Behandlung der Proportionen in der Unterstufe wohl kaum mitangesprochen worden waren. Die Schüler beteuerten jedenfalls ausnahmslos, daß dieser Aspekt "neu" für sie sei.

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 7

Zu 1: 1.1 Größenpaare, funktionale Deutung, Simplex: zu wenig Unterrichtserfahrung.

1.2 Umgekehrte Proportionen machen immer besondere Schwierigkeiten.

1.3 Bis hinein in die Oberstufe haben die Schüler Angst vor Textaufgaben.

Zu 2: Durch geeignete Überleitungen werden die Schüler behutsam mit den Problemen konfrontiert.

Zu 3: Es gibt bereits preiswerte Taschenrechner (z.B. CASIO fx - 100) mit Bruchrechnung.

ad 2) Ich habe in der 9. Klasse den Schülern auf mehreren Arbeitsblättern verschiedene Sachsituationen aus den Themenbereichen Dreisatz, Zinsen, Zinseszinsen, Prozentrechnen, Polynomfunktionen und Wachstumsfunktionen vorgegeben, die sie in Kleingruppen analysieren und mathematisieren mußten.
Ziel war dabei im wesentlichen, eine Abbildung zu erkennen, die Abbildungsvorschrift zu formulieren und zu untersuchen, inwieweit Linearität oder gar (direkte) Proportionalität vorlag.

Die Bearbeitung dieser Situationen fiel den Schülern außerordentlich schwer. Das mag einerseits an den mangelhaften Vorkenntnissen liegen, andererseits haben aber wohl auch die geringen Vorerfahrungen im Bereich der Anwendungen (Textaufgaben) überhaupt sowie ein zu hoher Komplexitätsgrad der angesprochenen Probleme zu der deutlichen Überforderung geführt. (Die überaus starke Ablehnung des Anwendungsbezugs habe ich aber - mit Ausnahme der Unterstufe - in allen Stufen erfahren müssen. Sie war in der Oberstufe sogar am ausgeprägtesten!)

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 8

1) Schüler schrecken vor dem großen Rechenaufwand zurück (3-Satz).
Aufgaben mit "glatten" Ergebnissen sind häufig praxisfern (Motivationsabfall).

2) Einsatz von Taschenrechnern in der Phase der Schlußrechnung und Prozentrechnung.
Aufgaben aus der Praxis (Tageszeitung etc.).

3) Einstiege in Proportionen über quotienten- oder produktgleiche Zahlenpaare halte ich für gefährliche Modeerscheinungen und Profilierungssucht (und Verpflichtung?) der Lehrbuchautoren.

Der alte Weg, das Dreisatzschema, ist zeitlich effektiver und wird auch von schwächeren Schülern noch aufgenommen!

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 9

1. a) Jüngere Schüler (bis etwa Klasse 8) stehen dem Problemkreis zunächst relativ unvoreingenommen gegenüber. Etwa ab Klasse 9, d.h. bei erneutem Auftreten etwa in Anwendungen, wirkt insbesondere der Begriff "Dreisatz" als Reizwort (vergleichbar mit dem Begriff "Mengenlehre"). "Dreisatz" gilt als schwer (bis zum Abitur!).

   b) Bei der Bearbeitung von Sachaufgaben wird häufig ohne Überlegung die direkte Proportionalität angenommen. Die Häufigkeit wächst mit zunehmender Entfernung von der erstmaligen Durchnahme.

   c) Es fällt vielen Schülern schwer, die richtigen Größenpaare zu finden; aus dem Aufgabentext heraus wird "wild" kombiniert.

2. a) Begriff "Dreisatz" wird weitgehend vermieden; das Wort "Proportionalität" wirkt neutraler und verhindert, daß Eltern oder ältere Geschwister ihre eigene Abneigung gegen den "schweren Dreisatz" den Schülern einreden.

   b) Viele Übungsbeispiele aus dem Alltag, bei denen - ohne Rechnung - entschieden werden muß, ob direkte, indirekte oder keine Proportionalität vorliegt; dabei auch "Scherzaufgaben", wie z.B. 1 Fußgänger braucht für den Weg zum Bahnhof 30 Min., wie lange brauchen 3 Fußgänger?

   c) Ich verlange besonders am Anfang das Aufschreiben einer sog. Kurztabelle:

Größe 1	a	b ....
Größe 2	c	x ....

Daraus wird dann nach der Überlegung, welche Prop. vorliegt,

z. B. die Gleichung $\frac{a}{c} = \frac{b}{x}$

aufgeschrieben und nach x aufgelöst.

Bewährtes Verfahren, das von vielen Schülern lange Zeit freiwillig beibehalten wird.

3. Durchführung praktischer Versuche, die den Schülern die Proportionalität schön demonstrieren; z.B.: Messen der Höhe einer zylindrischen Wassersäule und Bestimmung des Volumens.

Die Ergebnisse werden in einer Tabelle aufgetragen, die Quotienten Höhe/Volumen berechnet und in einer 3. Zeile aufgeschrieben - konstante Quotienten. Die Tabelle sollte "quer" angelegt werden, weil dadurch der Bruchstrich, d.h. die Division nahegelegt wird.

Die Anwendung des Taschenrechners zur Untersuchung von solchen Tabellen hat sich gut bewährt. Der Rechenstab ist nicht mehr aktuell, obwohl ja gerade hier seine Stärken liegen; er sollte aus den Schulbüchern verschwinden.

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 10

ad 1: In der Orientierungsstufe (Quinta), insbesondere auch in Physik, fällt auf, daß Zushg. wie je größer - desto größer zu schnell als direkte Proportionalität verstanden werden. Entsprechendes gilt für indirekte Proportionalität.

ad 2: Diesem ist durch geeignete Beispiele zu begegnen, z. B.: Verdoppelungsvorgänge bei konstanter Zeit.

ad 3: Ich halte es deshalb für sinnvoll, verschiedene funktionale Zusammenhänge in Wort und graphischer Darstellung zu behandeln, bevor man sich der rechnerischen Verarbeitung der direkten oder indirekten Proportionalität zuwendet.

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 11

Meine recht begrenzten Erfahrungen beziehn sich auf 2 siebte Klassen, die ich seit Beginn des Schuljahres 1980/81 führe.
In meiner Schule wird das Buch Gamma 7 benutzt, auf das ich mich im Unterricht auch weitgehend gestützt habe.
Proportionale und antiproportionale Funktionen wurden eingeführt und beim Dreisatz angewendet (vgl. Buch).

Schwierigkeiten traten natürlicherweise auf, als die Sch. die Eigenschaften prop. und antiprop. Funktionen anhand von Kurven im Koordinatenkreuz beschreiben sollten. Dabei fehlte es ihnen an Erfahrung und Ausdrucksvermögen.

Die allgem. Def., die vom Buch angeboten wird, ist etwas schwierig zu verstehen, wird aber nach einiger Übung angenommen und richtig wiedergegeben, wenn dabei auch keineswegs gewährleistet ist, daß es sich nicht nur um eine rein mechanische Wiederholung handelt.

Die Anwendung der prop. und antiprop. Funktionen beim Dreisatz erwies sich als für die Schüler recht einfach, weil man die fehlende Größe in der Kurztabelle genau so bestimmen konnte wie die Zahlenpaare für das Zeichnen von Funktionen.
Normalerweise wurde richtig erkannt, ob es sich um proportionale bzw. antiproportionale Funktionen handelt, so konnten Dreisatzaufgaben ohne sehr viel Übung richtig gelöst werden.

Bei der anschließenden Zins- bzw. Prozentrechnung habe ich aus Zeitmangel den Funktions- bzw. Abbildungscharakter etwas flüchtiger behandelt, wodurch leider die Kontinuität der Methode gestört wurde.

Allerdings wurden zu allen Aufgaben Operatordiagramme gezeichnet, wodurch keine strengen Regeln zu lernen waren (z.B. Kip-Regeln), sondern die Schüler jedes Mal neu entwickelten, wie zu rechnen sei. Das bereitet auf Gleichungslösen vor. Dabei darf natürlich nicht übersehen werden, daß die Schüler sich z. T. selbst entsprechende Regeln aufstellten.

Damit hatten die Schüler das Gefühl, daß Dreisatz, Prozentrechnung, Zinsrechnung irgendwo alle "dasselbe waren" bzw. auf ähnliche Dinge zurückgingen.

Ein Vorteil ist sicherlich, daß die "Funktionen" aus einer etwas sterilen Theorie in mehr praktische Anwendungen geholt werden.

Zu kämpfen hatte ich allerdings damit, daß die Eltern den Schülern "alte" Methoden beibrachten.

Um einmal zu zeigen, wie wichtig es ist, sich stets[1] zu überlegen, ob eine Funktion prop. ist oder nicht, habe ich eine Aufgabe gestellt mit einer antiprop. Funktion als die Schüler erst nur prop. kannten. Nun rechneten viele mechanisch ohne Überlegung los, wobei wegen der Antiproportionalität natürlich völlig falsche Ergebnisse auftreten, wenn die Methode für prop. Funktionen angewandt wurde.

Außerordentliche Schwierigkeiten traten bei der Umsetzung von $X \rightarrow Y$ in die sprachliche Form auf:
dem X wird ein Y zugeordnet.

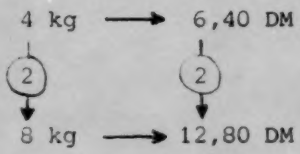
Meist wurde von den Schülern gesagt:
X wird dem Y zugeordnet, was auch irgendwie dem Pfeil (der Pfeilrichtung) in einem kindlichen, natürlichen Verständnis entspricht.

---

1) (bei Dreisatzaufgaben)

Schulform: Gymnasium
Lfd. Nr.: GY 12

Gemäß Beschluß der Fachkonferenz und eingeführtem Lehrbuch (Schröder-Uchtmann: Einf. in die Mathematik) werden Fragen aus dem Gebiet Proportionen zum ersten Mal in Klasse 7 behandelt. Hier stehen proportionale und umgekehrt proportionale Zuorndungen mit den Begriffen "quotientengleich" und "produktgleich" im Vordergrund. Zur Verdeutlichung des Begriffs "proportional" wird zunächst auf "den Schluß auf die Einheit" (= Dreisatz) verzichtet und entsprechende Aufgaben mit Operatoren



oder unter Zuhilfenahme der Quotientengleichheit mit entsprechenden Gleichungen gelöst.

Größere Schwierigkeiten ergeben sich dabei zuweilen, den Schülern Vorteile oder zumindest die Gleichwertigkeit dieser Methoden gegenüber dem typischen Dreisatz (Eltern!) nahezubringen. Bei Anwendung der angeführten Methoden sind die Schüler gezwungen, genau zwischen proportionalen und umgekehrt proportionalen Zuordnungen zu unterscheiden. Es ist daher manchmal von Vorteil, schon bei der Behandlung von proportionalen Zuordnungen Beispiele von umgekehrt proportionalen Zuordnungen einzuschieben, um die Schüler vor unreflektierter Anwendung des Systems "Dreisatz" zu warnen.

Proportionen der Form a:b=c:d werden in dem eingeführten Lehrbuch im Rahmen der Quotientengleichheit nicht speziell behandelt und auch nicht als Proportionen

gekennzeichnet, sondern erst in Klasse 9 beim Thema Strahlensätze aufgegriffen.
Die Folge ist, daß sich viele Schüler unter einem Verhältnis wenig und unter dem Begriff Verhältnis - Gleichheit gar nichts vorstellen können. Auf die Verdeutlichung dieser Begriffe müßte, auch mit Hinblick auf die Behandlung von proportionalen Funktionen, mehr Gewicht gelegt werden.

	Proportionalität	Dreisatz	Sachrechnen	Brüche/DZ	Proportionalität/Antiproport.	Funktion	Strahlensätze
Hauptstoßrichtung	- [illegible]	- [illegible]	- [illegible]	- [illegible]	- [illegible]	Schulform: Gymnasium lfd. Nr.: GY 13 Eine detaillierte Antwort auf die Frage nach Verhalten und Einstellungen der Schüler erscheint mir eher für eine Staatsarbeit angemessen. Bezgl. der Lernschwierigkeiten ist zu unterscheiden zwischen den unterrichtssituationen Einführung des Themas. Grundverhaltens wie Prop., Prozentbegriff, Ähnlichkeit) und B (Grundsachverhalte auf Sachprobleme)	
Lernziel: algor. Asp.	- [illegible]		Hauptschüler sind in der Regel nicht in der Lage, Sachprobleme gut zur Motivation zu benutzen sind, sondern bei A kaum Probleme ergeben. Bei bestimmten Größenpaaren wie Menge, Preis, Arbeitsgeschwindigkeit, Zeit wird die proportionalität sofort erkannt und akzeptiert (ohne Bedenken bzgl. Ausnahmen wie Mengenrabatt oder Rohstoffmangel). Die vollständige Voraussetzung der Arbeitsleistung (Arbeitsgeschwindigkeit, Zeit) ist ganz dritter Größen z.B. Arbeitsleistung der Mitarbeiter), daß nur die Einstrukturierung "Dreisatz" als Hauptschüler vorhanden ist.				
numer. Asp.	- [illegible]						
inf. verarb. Aspekt							
Faßbarkeit allgemein	- [illegible]	- [illegible]	- [illegible]	- [illegible]	- [illegible]		
Alter							
Sonstige Einflüsse							
Methodisch-didaktische Hinweise	Siehe Anmerkung 1	Siehe Anmerkung 2	Siehe Anmerkung 3	Siehe Anmerkung 4	- Siehe Anmerkung 5		

Situation B ist etwa ca 80 % der Schüler wesentlich dringlicher, unmittelbarer auch als formaler Ansatz wie Termumrechnung, Währungen. Weniger begabten hier sowohl Umfang der Aufgabe als auch Konzentrations- und Organisationsfähigkeit möglichst Übersicht, Rechnung zur Sicherheit garantiert.

Hinder aus Unsicherheit keinen Anfang und macht nichts.)

als auch zu Codierungsproblemen (Strukturübertragung:
- Sachaufgabe als auch der großen Unterschiedlichkeit
- Mathematik sowie Formulierung der Denk-
- Aufgabenteile (die teils

(Ich habe die Erfahrung gemacht, daß die Bewältigung großer Schwierigkeitsunterschiede ebenso hohe Begabung erfordert wie die von großen Schwierigkeiten.)
Zu diesen sachbedingten Lernschwierigkeiten kommen dann noch psychologische: Die Möglichkeit, Begabungsdefizite durch größeren Fleiß auszugleichen, ist infolge der Komplexität der Begabungsanforderungen relativ gering, so daß fleißige Schüler besonders frustrationsgefährdet sind. Dann gibt es die üblichen Mißerfolgsrückkoppelungen (Zinsrechnung kann ich nicht, alle können das nicht. Wenn ich schon das Wort Textaufgabe höre, kann ich nichts mehr.)

Da die objektive Schwierigkeit der Aufgaben dem Alter der Schüler angepaßt werden, sind die Lernschwierigkeiten bei denen, die sie haben, nicht alterspezifisch, wenigstens nicht im Gruppendurchschnitt, höchstens infolge mehr oder weniger starken Einsatzes bzw. Verarbeitung von Lernhilfen durch einzelne. Deshalb ergibt sich im Laufe der Schulzeit auch keine generelle Abschlußkonsolidierung wie z. B. beim Erlernen der Grundrechenarten.

Pädagogische Maßnahmen im Hinblick auf o. g. Lernschwierigkeiten:

a) Sachliche Hilfen:

- Erarbeiten von Rahmenprogrammen mit Sicherstellung, daß die Bearbeitung überhaupt begonnen wird.
- Erklärung von Sachverhalten zum Schließen von Erfahrungslücken.
- Typisierung, um innerhalb eines Typs Routine zu entwickeln.
  (Der Proportionalitätsbegriff selbst wird am ehesten durch den Physikunterricht aktuell gehalten.)

b) Psychologische Hilfen:

- Wechsel des Schwierigkeitsgrades, um der Fixierung der Erfolgslosengruppe entgegenzuwirken.
- Wechsel der Unterrichtsinhalte, um Frustrationszeiten nicht zu groß werden zu lassen (z.B. Mischen: Textaufg. - formale Gleichungslehre)
- Hinweis der Schüler auf den erhöhten Schwierigkeitsgrad, ebenso wie auf die Lernmöglichkeiten (methodische Anleitungen).

Eine Schlußfolgerung sollte aus der Existenz der Lernschwierigkeiten m. E. nicht gezogen werden; nämlich die schwierigen Aufgaben aus dem Curriculum zu streichen.

1.3.4 GESAMTSCHULE

Schulform: Gesamtschule
Lfd. Nr.: GS 1

ad 1: 1.1 Schüler der Klasse 7.

Probleme in der Übertragung von Text auf Zuordnung bzw. Dreisatz, also Mathematisierung! Dazu zählen so simple Dinge wie:

- Übersetzen der Sprache in formale Zuordnungen.
- Herausfinden der richtigen Informationen.
- Unterscheidung von direkten und indirekten Proportionen.

Ein Zusammenhang zwischen Intelligenzleistung und obigen Fertigkeiten scheint erkennbar. Bis mittlerer Intelligenzstufe gut lehrbar nach den Curricula; aber was macht man mit schwächeren Schülern, die entsprechende Einheiten höchstens wie Kochrezepte 4-6 Wochen behalten? Alte Arbeiten über Schülerleistungen zeigen dieselbe Problematik. Schwächere Schüler werden mit Sicherheit durch strukturbetonte Mathematik überfordert. Eine didaktische Erneuerung des Begriffs "lebensnah" wäre zu wünschen.

1.2 Schüler höherer Jahrgänge.

Eine Wiederholung der Sachverhalte ist dringend nötig. Der Stoff dringt durch einmaliges Behandeln nicht in den Bereich "Verfügbares Wissen und Können".

ad 2: Textanalyse, Schema f für schwächere Schüler, einfachere Lösungsmöglichkeiten werden nur angedeutet.

Wiederholung, Angabe von nichtbenötigten Zahlenaufgaben.
Behandlung von "unsinnigen" Aufgaben nach einer Einschleifphase etc..
Wiederholung des ganzen Sachgebietes in 9 und 10!

ad 3: Der Dreisatz des alten Schulmeisters wurde unsinnigerweise belächelt. Eine Mathematisierung in Form von Zuordnung schadet nichts, es sei denn, daß echtes Einschleifen von Lösungen unterbleibt. Es fehlen kognitive Analysen von schwächeren Schülern. Hilfen zur Vorerfahrung. Aufgrund alter Tests Übergang 4 - 5 Gymnasien sieht man, daß begabte Schüler über Proportionen verfügen. Wie können dies schwächere Schüler erlangen. Vorübungen zur Linearität, Übergang zur Einheit etc. wären vonnöten!

Schulform: Gesamtschule
Lfd. Nr.: GS 2

ad 1: Sobald der anschauliche Bereich verlassen wurde, tauchten die eigentlichen Schwierigkeiten auf. Es zeigte sich, daß die anfänglichen Erfolge bei komplexen Aufgaben versiegten. So konnten die Schüler mit Leichtigkeit bei der Proportionalität Menge = Preis —— Stück = Stückpreis, —— neue Menge = Endpreis schnell zuordnen, auch graphisch, sobald aber nur rein rationale Aufgaben gestellt wurden, konnten diese nur mit Hilfe gelöst werden.

Ähnliche Erfahrungen erlebt man in anderen Sachgebieten. Auch mit zunehmender Jahrgangsstufe mußte aus dem Anschauungsbereich ähnlich zum abstrakten übergegangen werden.

ad 2: Aus der Erfahrung heraus erarbeite ich ein Problem möglichst lange im Anschauungsbereich; so daß z. B. bei Gleichungen eine Waage zu Hilfe genommen wird mit möglichst vielen Bauklötzen, dann wird zunächst das Prinzip des Gleichseins veranschaulicht und geübt; danach die Gleichbehandlung der Terme immer aus der Anschauung heraus. Erst wenn Anschauung und Theorie verstanden sind, wird die Anschauung allmählich zurückgenommen und der rein rationale Aufgabenteil angegangen.

ad 3: - Zunächst sollte jeder Lehrer die Schüler auf einen ungefähr gleichen Wissensstand innerhalb seiner Klasse bringen. Mängel, die er entdeckt, nicht verdecken, sondern beheben, auch auf Kosten von Unterrichtseinheiten.

Es nützt nämlich nichts, alle Unterrichtseinheiten behandelt zu haben, wenn die Schüler diese nicht begriffen haben.

- Alle Fragen zulassen (auch die dümmste), nur so kann ein Klima des Vertrauens geschaffen werden.
- Bei jeder sich bietenden Gelegenheit kurze Wiederholungen von behandelten Sachgebieten (aber wirklich nur kurz) durchführen.
- Bei Klassenarbeiten und Übungsaufgaben von leichten bis sehr schweren Aufgaben stellen, nur so entwickelt sich Stolz auf die eigene vollbrachte Leistung.
- Auch Lob gehört in den Mathematikunterricht, wie auch Lachen und lustige wie spannende Sachgeschichten.
- Obenan sollte allerdings ein sehr disziplinierter Unterricht gewährleistet sein, denn in einer arbeitsunwilligen Atmosphäre kann kein Mathematikwissen erlangt werden, das soll aber nicht heißen, daß die Schüler in diesen Stunden Angst und Schrecken erleiden müßten; nein, die Sache soll vom Interesse getragen sein, bei der jeder mithelfen soll.

Schulform: Gesamtschule
Lfd. Nr.: GS 3

Dem Bereich "Proportionalität" standen die Schüler der 7. Klasse sehr fremd gegenüber. Überfrachtet mit neuen Begriffen und auf Kriegsfuß mit dem Bruchrechnen sowieso, konnte sich nur ein Teil für diese neue Rechenart erwärmen. Überhaupt wurde im Rahmen des Sachrechnens sofort der bekanntere "Dreisatz" in der alten Form bevorzugt. Erst nachdem im 9. Schuljahr im Rahmen der Ähnlichkeitslehre die Proportionen "sichtbar" wurden, waren die Schüler bereit, mit Proportionen zu rechnen.

Schwierigkeiten gab es dann noch bei erweiterten Dreisätzen, Zinseszinsaufgaben.
Außerdem trug im 9.-10. Jahr der immer stärkere Akzent auf Funktionen und ihre Bedeutung zur Erhellung der Propotionalität bei.

Ich meine, man sollte die Proportionalität später im Lehrplan ansetzen; sozusagen als alle (viele) Zweige des Rechnens durchdringende oder umfassende Rechenart, also zuerst die Einzelteile, dann die Klammer, die alles durchdringt.

Zum Schluß noch der Hinweis, daß Eltern hier kaum helfend einspringen können, da ihnen Proportionalität ein unbekanntes Wesen ist und alle Ansätze im Umgang mit Proportionen sofort auf die altbekannten Rechenarten abwälzen.

Schulform: Gesamtschule
Lfd. Nr.: GS 4

Zu 1: a) Verhalten

Mit steigender Altersstufe steht der Durchschnittsschüler der Mathematik eher skeptisch gegenüber. Die Verwissenschaftlichung des Faches, Anspruch und Schwierigkeitsgrad lassen ihn oft den Bezug zur Wirklichkeit missen.

Folge: Er sperrt sich und kämpft nur um gute Noten.

b) Schwierigkeiten

Lösungsstrategien sind ihm oft nicht plausibel (gleichnamig machen) oder nicht gegeben (Textaufgaben).

Darüber hinaus braucht er Kenntnisse der Bruch- und Dezimalrechnung bei der Lösung von Aufgaben zum Dreisatz, Proportionen und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Folge: Liegen diesen Kenntnissen nicht vor, ist der Schüler demotiviert.

Zu 2: Lehrerverhalten

Ich versuche den math. Sachverhalt auf eine gegenständliche Ebene zu ziehen bzw. durch geometrische Deutung zugänglich zu machen. Häufiges Wiederholen soll wenigstens formal eine Lösung möglich machen.
Bei Textaufgaben bin ich relativ hilflos.

Zu 3: Vorschläge

1. Möglichst im Bereich IN bleiben.
2. Taschenrechner einsetzen.

Schulform: Gesamtschule
Lfd. Nr.: GS 5

1. Meine Erfahrungen mit dem Themenkreis "Proportionalität" beschränken sich auf die

   - Einführung des Gebietes "Funktionen" (proportionale/antiproportionale Funktionen und ihre Darstellung, Größenlehre mit den Aspekten Prozent- und Zinsrechnung/Schlußrechnen) in Klasse 7,

     Wiederholung und Fortführung des Kapitels "Lineare Funktionen" (proportionale und umgekehrt proportionale Zuordnungen, Verhältnisrechnung) in Klasse 9.

   In Klasse 7 zeigt sich noch ein großes Interesse der Schüler an diesem Unterrichtsstoff, wo es darum geht, sowohl Methoden der Mathematik auf Umweltphänomene anzuwenden als auch konkrete Situationen zu mathemisieren. Dies - vor allem der Realitätsbezug - ist auch wohl der Grund, daß die Schüler der Klasse 9 bei der Wiederholung der grundlegenden Begriffe zur Proportionalität keine Probleme hatten.

2. Im wesentlichen geht es also darum, die Motivation und das Interesse der Schüler am Gebiet "Proportionalität" zu erhalten, vor allem da proportionale Probleme in vielen mathematischen Bereichen eine Rolle spielen.

3. Wichtig für die Schüler (bes. in Klasse 7) ist das selbsttätige Lernen und Üben, z. B. beim zeichnerischen Darstellen proportionaler/antiproportionaler Funktionen oder beim Aufstellen von Tabellen (nach Schülerversuchen).

Schulform: Gesamtschule
Lfd. Nr.: GS 6

Schüler haben Schwierigkeiten bei Textaufgaben, die richtigen Proportionen zu erkennen.

Beim Aufstellen der Proportionen kommen grundsätzliche Schwierigkeiten aus der Bruchrechnung dazu.

Beim Sachrechnen treten Probleme auf beim Beachten der richtigen Größe und beim Umsetzen des Textes in einen mathem. Ausdruck.

Wir werden bei uns versuchen, den funktionalen Aspekt so früh wie möglich in den Unterricht einfließen zu lassen und graphisch darzustellen.

2. L I T E R A T U R N A C H W E I S E

Dieses Kapitel stellt ein Informationsgeflecht dar, das nur optimal genutzt werden kann, wenn man die zugeordneten Abschnitte des Heftes "Proportion" beachtet, die jeweils angegeben sind.
Orientierungshilfen bieten außerdem die Lehrzieltafel auf S. 130/131 und die Strukturskizzen auf S. 40/41 des Heftes "Proportion".

Im folgenden soll auf die Präsentation der Dokumente in Form von Computerausdrucken näher eingegangen werden. Alle in die Dokumentation aufgenommenen Materialien sind datenmäßig am Landesinstitut erfaßt worden, d. h. sie sind jederzeit nach unterschiedlichen Kriterien für den Benutzer abrufbar.

Die folgende Übersicht kommentiert einen solchen Computerausdruck; dabei wird die Erklärung einzelner Kategorien der Titelaufnahme, die alle möglichen Kategorien beinhaltet, vorgenommen; darüber hinaus wird auf die Kriterien eingegangen, die bei der Anfertigung der Kurzreferate zu den Texten berücksichtigt worden sind.

Das Kategorienschema:

20 Bis zu drei (persönliche) Verfasser des Werkes werden hier genannt.

21 Institution oder Körperschaft als Verfasser.

30 Angabe des Sachtitels sowie ggf. des Untertitels.

37 Hochschulschriftenvermerk, z. B. Dissertationen oder Habilitationen; nicht im Buchhandel erhältlich.

40 Eine Personenangabe entweder zusätzlich zum Verfasser oder anstelle des Verfassers, wenn dieser nicht angegeben ist, z. B. Herausgeber, Bearbeiter, Mitarbeiter, Übersetzer.

41 Eine herausgebende Institution oder Körperschaft.

50 Die bibliographischen Angaben bei Büchern (Erscheinungsort, Erscheinungsjahr, Verlag, Seitenzahl).

51 Die bibliographischen Angaben bei Zeitschriftenbeiträgen
(Name der Zeitschrift, Jahrgang, Heftnummer, Seitenzahlen).

52 Die bibliographischen Angaben bei Teilen aus Büchern
(Verfasser, Titel des Buches, Erscheinungsort, Erscheinungsjahr, Seitenzahlen).

53 Hinweise auf Reihen oder Serien, in denen ein Buch erschienen ist.

54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN), erleichtert die Bestellung im Buchhandel.

56 Bei fremdsprachigen Werken wird hier die Sprache des Urtextes angegeben, einigen Texten sind auch Abstracts in einer weiteren Sprache beigefügt (z. B. Urtext französisch, Abstract englisch).

70 Wenn der Sachtitel nicht in deutscher, englischer oder französischer Sprache abgefaßt ist, folgt dieser Kategoriennummer eine Gefälligkeitsübersetzung.

71 Standortnummer des beschriebenen Originals in den Bibliotheken des Landesinstituts.

74 Wenn ein Original auf Mikrofilm übertragen und in eine entsprechende Sammlung eingereiht wurde, haben wir die Zugriffsnummer, wenn sie uns bekannt wurde, hier angegeben. Große Universitätsbibliotheken führen Mikrofilmarchive, dort können die Texte dann gelesen und ggf. Kopien angefertigt werden.

99 In freier Form wird nach dieser Kategorienkennzeichnung das Original beschrieben.

Bei der Anfertigung der Textreferate (Abstracts) wurde wesentliches Gewicht auf die Verwendbarkeit innerhalb der Aufgabenstellung gelegt. Zentrale Arbeiten werden daher meist sehr ausführlich dargestellt - auch, um mühsames Beschaffen durch den Leser zu erleichtern oder zu erübrigen. Häufig nehmen kürzer beschriebene Arbeiten auf Ansätze oder Begriffe oder Ergebnisse Bezug, die vorausgehend ausführlicher beschrieben wurden.

Jedem Subkapitel des Kapitels 2 ist eine Kurzfassung dieses Kategorienschemas vorangestellt, ferner finden Sie diese Kurzfassung auf der Innenseite des Rückdeckels.

In wenigen Fällen ist das Original der dokumentarischen Nachweise nicht (oder noch nicht) in unseren Bibliotheksbeständen - Sie finden dann am Ende des Textreferates einen diesbezüglichen Hinweis.

Die Titelnummmer selbst ist nach folgendem Schema aufgebaut:

Erster Buchstabe:	Angabe des Faches innerhalb des Didaktischen Informationsdienstes, hier "M" für "Mathematik".
Zweiter Buchstabe:	Themenangabe innerhalb des Faches, hier "P" für "Proportion".
Erste Ziffer:	Hauptkapitel
Zweite Ziffer:	ggf. Unterkapitel
Klammerangabe:	laufende Nummer in dem jeweiligen Kapitel.

Alle in diesem Heft enthaltenen Literaturnachweise gehören zu dem Projekt "Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Proportion", haben folglich die Kennung: MP.

2.1 A L L G E M E I N E S

Die Zusammenstellung der hier vorliegenden Dokumente erfolgte nicht unter dem Gesichtspunkt der Vollständigkeit oder Repräsentativität. Vielmehr geht es um die Bereitstellung typischer und wichtiger Dokumente der aktuellen mathematischen Unterrichtsforschung (vgl. Einleitende Vorbemerkungen).

2.1.1 Empirische Unterrichtsforschung Mathematik (Methoden)

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetze, Herausgeber
41 Koporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-1.1(01)

20 Lorenz,Jens Holger;
30 /Empirische Forschung in der Mathematikdidaktik/.
51 Journal fuer Mathematikdidaktik 1/1980/1,2,
S.7-23.
71 MA-AA 00-37;

99 Kritische Bestandsaufnahme der neueren empirischen Forschung in der Bundesrepublik Deutschland,soweit sie Mathematikunterricht betrifft:
- es wird gezeigt,dass die vorliegenden Forschungsarbeiten stark zersplitterte Ergebnisse liefern, statistisch oft unbefriedigend sind und vor allem kaum der Genese einer Theorie des mathematischen Lehrens und Lernens dienen;
- damit entsteht die Gefahr,dass die bisher geleistete Forschung administrativ verordnete Unterrichtsreformen nicht beeinflussen oder struktieren kann.

Aus diesen Erkenntnissen heraus stellt der Beitrag Desiderate fuer empirische Forschung im Bereich des Mathematikunterrichts auf,u.a.Erforschen von mittelfristigen Lernablaeufen sowie der Interaktions- und Kommunikationsstrukturen.

TITELNUMMER: MP-1.1(02)

20 Viet,Ursula;Radatz,Henrik;
30 /Diskussionspapier zur empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik/.
51 /Journal fuer Mathematikdidaktik 1/1980/ 1/2,S.24-27.
71 MA-AA 00-38;

99 Auseinandersetzung mit den Ausfuehrungen von Lorenz (im gleichen Heft).
Aufweis wichtiger und lohnender Fragestellungen empirischer Unterrichtsforschung im Mathematikunterricht (s.folgendes Schema):

Ziele und Verwendung	Arten	Methoden
1.Pruefung von Unterrichtsentwuerfen Evaluation von Unterrichtseinheiten	Versuche in einzelnen Klassen	Dokumentation von Unterricht (Video/Tonbandaufnahmen) Auswertung von Schuelerarbeitsbogen und Tests, Fehleranalysen
2.Erprobung/Standardisierung, von Tests	Einsatz in vielen Klassen (bei Standardisierung von mehr als 3000 Schuelern)	Statistische Auswertung, Itemanalyse, Normierung, Validierung an Unterrichtskriterien

3.Vergleich von didaktischen Methoden Medien, Unterrichtsformen/stilen,Organisationsmodellen,	Kontrollgruppenversuche in Klassen Langzeituntersuchungen in Schulen	Verfahren der beurteilenden Statistik (Hypothesenpruefung)
4.Erforschung von Lernverhalten, Lernvoraussetzungen, Lernschwaechen, Einstellungen	Fallstudien, Leistungsprofile,Faehigkeitsmuster (in Klassen, Kursen, Gruppen)	Beobachtungen, Dokumentation, Erhebung von kognitiven und nichtkognitiven Daten, Interviews,Frageboegen,Tests Statistische Analyse
5.Untersuchung zur Verfuegbarkeit und Verwendbarkeit des math.Schulstoffes im Berufsleben	Stichproben aus Berufsgruppen,Analyse der mathematischen Berufsanforderungen.	Tests,Frageboegen, Interviews Fallstudien

TITELNUMMER: MP-1.1(03)

20 Bauersfeld,Heinrich;Heymann,Hans Werner;
Lorenz,Jens-Holger;
30 /Forschung in der Mathematikdidaktik/.
50 Koeln:Aulis/1981/.265 S.
53 /IDM-Reihe.3/
54 3-7614-0592-8;
71 MA-AA 10-12;

99 Ueberblick und Beispiele neuerer Ansaetze zur empirischen Unterrichtsforschung (Lehrer-Schueler-Interaktion,Schueler-bezogene Forschung,Lehrer und Unterrichtsforschung,Inhaltsprobleme,Methodisches Vorgehen in der Forschung) im Mathematikunterricht.

Inhalt im Einzelnen:

Lehrer-Schueler-Interaktion
- Aspekte der Unterrichtsforschung
  von Erika Schildkamp-Kuendiger
- Unterrichtsanalysen im Mathematikunterricht
  der Orientierungsstufe
  von Hans Werner Heymann
- Zum Problem der Identifikation relevanter Variablen fuer den Zusammenhang zwischen Lehrerverhalten und Lernerfolg im Unterricht
  von Veronika Reiss
- Kommunikation im paedagogischen Kontext - Moeglichkeiten und Bedingungen ihrer Analyse
  von Wolfgang Herrlitz

Schueler-bezogene Forschung
- Messmethoden und Entscheidungsverfahren in der mathematischen Unterrichtsforschung
  von Bernhard Andelfinger

24i

- Diagnostik mathematischer Faehigkeiten bei Schuelern der Eingangsstufe - Bemerkungen zum Methodenproblem
  von Hans Koops
- Soziales Lernen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II
  von Hermann Pfeiffer
- Analyse von Problemloeseprozessen als ein Aspekt des Problemloesens in der Mathematikdidaktik
  von Bernd Zimmermann

Der Lehrer und Unterrichtsforschung

- Zum Stellenwert didaktischer Prinzipien im Mathematikunterricht
  von Eberhard Dahlke
- Plaedoyer fuer ein Modell empirischer Unterrichtsforschung
  von Christine Keitel-Kreidt
- Lehrer und Unterrichtsforschung - am Beispiel englischer Erfahrungen
  von Juergen Lueking
- Mathematikunterricht nach lehr-lern-theoretischer Orientierung
  von Friedrich Zech

Inhaltsprobleme der mathematikdidaktischen Forschung

- Lehrinhaltsbezogene Unterrichtsanalyse:Zur Operationalisierung einiger hypothetisch bedeutsamer Variablen in Lehr-Lern-Prozessen
  von Helmut M.Niegemann
- Eine Untersuchung zum Analogisieren und strukturellen Transfer
  von Uwe-Peter Tietze

Methodisches Vorgehen in der mathematikdidaktischen Forschung

- Forschungsmethoden im Mathematikunterricht
  von Jens Holger Lorenz
- Aspekte mathematikdidaktischer Unterrichtsforschung
  von Hendrik Radatz

- Paul-Heinz Leifhelm/Peter Sorger
  Zur Einfuehrung der schriftlichen Addition und Subtraktion - Schuelerreaktionen auf eine methodische Variante
- Rudolf Stuebe
  Einsatz der "Reihenbloecke" in einer Sonderschulklasse fuer Lernbehinderte
- Hendrik Radatz
  Einige methodologische Probleme bei der Analyse von Schuelerfehlern.
- Hartmut Wallrabenstein
  Die Musterlektion -
  Darstellung einer Lehr-Lern-Situation und Kommentar
- Heinrich Bauersfeld
  Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht -
  Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung
- Inga Karcher
  Die Spinne und die Fliege - ein geometrisches Problem im Raum
- Wilhelm Striebl
  Eindruecke von einem Fortbildungslehrgang.

TITELNUMMER: MP-1.1(05)

20 Andelfinger,Bernhard;
30 /Provocative texts and spontaneous reactions of teachers - a method for recognizing teaching and learning of mathematics/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble: Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.381-386.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-45;

99 Beschreibung der Methode der "spontanen Reaktion" ei Lehrerumfragen.
Herstellung,Aufbau und Ergebnisse solcher provozierender Umfragen bei Mathematiklehrern werden beschrieben (Umfragen wurden 1979-1980 durchgefuehrt).

- Probleme der Steuerung des Lehr-Lern-Forschungs-
  programms am Beispiel der Programmeinheit
  "Lehrereffektivitaet"
  von Bernhard Treiber

Die zu einem Themenbereich gehoerenden Beitraege werden durch Diskussionsbeitraege ergaenzt.

TITELNUMMER: MP-1.1(04)

30 /Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht/.Festschrift fuer Walter Breidenbach zum 85.Geburtstag.Zugleich ein Beitrag zur didaktischen Unterrichtsforschung.
40 Bauersfeld,Heinrich(Hrsg.);Gnirk,Hans-Joachim (Mitarb.);Hefendehl,Lisa(Mitarb.);
50 Hannover:Schroedel/1978/.180 S.
53 /Auswahl.B 95/
54 3-507-36446-8;
71 Reckl.;

99 Das Buch enthaelt Beispiele empirischer Analysen des Mathematikunterrichts und seines Umfelds, gleichzeitig werden empirische Untersuchungsmethoden dargestellt.

Inhalt:

- Ursula Viet
  Umgangssprache und Fachsprache im Geometrieunterricht des 5. und 6.Schuljahrs
- Siegfried Kothe/Hans-Joachim Gnirk
  Breidenbachs Forderungen:Sachgerecht und kindgemaess - was heisst das heute?
- Lisa Hefendehl
  "Bei minus,da geht's anders herum"
- Manfred Schindler
  Inwieweit sind Kinder im 4.Schuljahr in der Lage,ihre Kenntnisse ueber die bilaterale Symmetrie in einer realen Situation anzuwenden?
- Manfred Leppig
  Untersuchungen ueber Arbeiten mit dem Richtungsbegriff im Primarstufenalter
- Peter Kirsche
  Erfahrungen zur Punktsymmetrie in der Grundschule

TITELNUMMER: MP-1.1(06)

20 Sturgess,David;
30 The /Problems of the Teacher of Mathematics/.A report of an experiment in group enquiry.
50 Nottingham:University/1980/.136 S.
54 0-85359-073-7;
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-2;

99 Beschreibung von Design und Ergebnissen gruppenbezogener,regionaler Fortbildung von Mathematiklehrern in England.
Die Arbeit enthaelt viele unterrichtspraktische Ergebnisse (u.a.fuer die Bruchrechnung) und drueckt die Probleme von Lehrern vor Ort sehr klar aus.
Verarbeitet wurden Ergebnisse aus den Jahren 1977 und 1978.

2.1.2 Empirische Unterrichtsforschung Mathematik (Beispiele)

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetzer, Herausgeber
41 Korporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-1.2(01)

30 /National Assessment of Educational Progress/.
Released Mathematics Exercises 1972-73.Juni 1975.
41 National Assessment of Educational Progress(Denver,
Colorado);
50 Denver,Colo.:NAEP/1975/.381 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 51-2;

99 Die Planung zu der 1972-73 durchgefuehrten Umfrage
ist im Teil "Mathematics Objectives" dargestellt,
die Untersuchung selbst mit allen Fragen und den
dazugehoerigen Auswertungen im Hauptteil.
"Released Mathematics Exercises".Die Untersuchung
selbst wurde in allen Bundesstaaten in vier alters-
homogenen Gruppen (9,13,17 und 26 bis 35jaehrige)
durchgefuehrt.

TITELNUMMER: MP-1.2(02)

30 /Selected Supplemental Mathematics Exercises to the 1975-76 Assessment/.
41 National Assessment of Educational Progress (Denver,Colorado);
50 Denver,Colo.:NAEP/1976/.V,184 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 51-3;

99 Zwischen den beiden grossen nationalen Umfragen 1972/73 und 1977/78 in USA fand 1975/76 eine Umfrage zu ausgewaehlten Stoffgebieten des Mathematikunterrichts statt.
Die verwandten Testblaetter sind mit der dazugehoerigen Auswertung abgedruckt.

TITELNUMMER: MP-1.2(03)

30 The /Second Assessment of Mathematics,1977-78/. Released Exercise Set.
41 National Assessment of Educational Progress (Denver,Colorado);
50 Denver:National Institute of Education/1979/. 356 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 51-4;

99 Die Ergebnisse der ersten Umfrage 1972-73 sowie der ·satzumfrage 1975-76 wurden durch eine Kommission ausgewertet und in das Testinstrument der zweiten Umfrage eingearbeitet.Beteiligt waren an der Auswertung neben Mathematiklehrern und -hochschullehrern Eltern und andere,an der Erziehung interessierte,Personen.Das Instrument selbst und die Auswertung ist in dem "Released Exercises Set" enthalten.

TITELNUMMER: MP-1.2(04)

20 Hogan,T.P.;
30 /Student's interest in particular mathematics Topics/.
51 /Journal for Research in Mathematics Education/, 8/1977/3,S.115-122.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-40;

99 Design:13 000 Schueler (Grade 4-8) in USA - ein repraesentativer Querschnitt - wurden mit verschiedenen (aber analogen) Frageboegen befragt.
Die Frageboegen enthielten Beispiele und Texte zu den wichtigsten mathematischen Gebieten;dabei wurde nach der Beliebtheit der einzelnen Aufgabentypen gefragt (do you like work with figures,hard division problems), folgende Antwortmoeglichkeiten waren vorgesehen:
positive/neutrale/negative Einstellung.

Ergebnisse:

1)2/3 der Schueler haben ausgepraegte Vorlieben fuer mathematische Stoffe
2)Numerische,messende und figural-aktive Gebiete der Schulmathematik schneiden positiv und bezueglich der Altersentwicklung stabil ab.
3)Division,beschreibende Geometrie,"Mengenlehre" schneiden negativ ab.
4)"Grosse" und "Schwere" Zahlen schrecken ab.
5)Bei Grade 4-6 liegt die Beliebtheit bei 42% - 80%;bei Grade 7-8 liegt die Beliebtheit bei 25% - 58% (insgesamt also Abnahme).
6)Bei Grade 7-8:
Brueche ~ 40%;Graphen ~ 40%.

TITELNUMMER: MP-1.2(05)

20 Lybeck,Leif;
30 /Research in Science Education:Sweden 1976/.
Paper presented at the Council of Europe Contact
Workshop "Research in Science Education in Europe.
Improvement of research activities and results".
Oct.27-29,1976,Malente-Gremsmuehlen(Kiel).
41 Institute of Education(Goeteborg);
University(Goeteborg);Council of Europe Contact
Workshop(Oct.1976,Malente-Gremsmuehlen);
50 Goeteborg:Institute of Education/1978/.III,41 S.
53 .. ncept Formation in Mathematics and the Natural
Science,the Integrated Upper Secondary School.
8/;/Institute of Education(Goeteborg).Report.74/
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-43;

99 Die Arbeit gibt einen guten Ueberblick ueber die
Ziele und Methoden der naturwissenschaftlichen
Unterrichtsforschung in Schweden (Stand:1976).
Der Beitrag zeigt exemplarisch verschiedene Aspekte
von Unterrichtsforschung,er ist jeweils in die
drei Bereiche:Vorschule,Schule,Universitaet/Paeda-
gogische Hochschulen gegliedert.
Ein ausfuehrliches Literaturverzeichnis ist ange-
fuegt.

TITELNUMMER: MP-1.2(06)

20 Rees,Ruth;
30 The /structure of mathematics abilities.Some examples illustrating dimensions of difficulty/.
52 /Proceedings of the second international conference for the psychology of mathematics education/, Osnabrueck:Univ./1978/,S.278-285.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-35;

99 An umfangreichen Tests zu verschiedenen mathematischen Gebieten (der Sekundarstufe I) wird gezeigt,dass nicht-rechnerische Teile der Mathematik haeufig leichter zugaenglich sind als rechnerische Teile.
Es wird vermutet,dass rechnerische Teile der Mathematik viel schwierigere Konzepte in sich bergen als seither angenommen.

TITELNUMMER: MP-1.2(07)

20 Rees,Ruth;Curnyn,Jim;Barr,George;
30 /Investigations into the mathematical difficulties experienced by students and the reason for these difficulties/.
52 /Proceedings of the third international conference for the Psychology of Mathematics education/, Warweck:Univ./1979/,S.170-171.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-36;

99 eschreibung einer Reihe von rechnerischen Schuelerschwierigkeiten durch Test- und Interviewbeispiele.
Der Beitrag gibt einige konkrete Beispiele zu der von R.Rees 1978 Titelnr.MP-1.2(07) aufgestellten These ueber die Schwierigkeiten rechnerischer Teile der Mathematik (vgl.R.Rees:The Structure of mathematical abilities, 1978).Ausserdem enthaelt der Beitrag eine ausfuehrliche Liste einschlaegiger Literatur.

TITELNUMMER: MP-1.2(08)

20 Fey,James,T.;
30 /Mathematics Education Research on Curriculum and Instruction/.
52 /Research in Mathematics Education/,/1979/, S.388-432.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-39;

99 Es handelt sich um einen umfassenden Ueberblick ueber den Stand,die Trends und zukuenftige Aufgaben der Unterrichtsforschung unter Einbezug der psychologischen und gesellschaftswissenschaftlichen Hintergrundtheorien.

Zentrales Ergebnis:

- Vermittlung von Mathematik in linear-systematischer Form ist wenig erfolgreich;
- die individuellen Unterschiede sind beachtlich;
- die Lerngeschwindigkeit ist wesentlich geringer als angenommen.

Forderungen:
- Erstellen spiraliger Lern-Arrangements;
- Herausstellen zentraler Ideen;
- breite Differenzierungen.

TITELNUMMER: MP-1.2(09)

20 Radatz,Hendrik;
30 /Untersuchungen zu Fehlleistungen im Mathematikunterricht/.
51 /Journal fuer Mathematikdidaktik/,1/1980/4, S.213-228.
71 MA-AA 00-47;

99 1) Fehlerstrategien bleiben ueber ca.50 Jahre der Beobachtung durch Forschung stabil,nicht nur in der Arithmatik.
) Schueler fassen Mathematik als ein "Regelspiel" auf.Die math.Begriffe und Techniken werden nicht im wissenschaftlich-rationalen Sinne erfasst;sie werden irgendwie (Primarstufe:spielerisch-beliebig;S-I:staerker ueberlegt,d.h. sollen den Realitaetsbedingungen nicht widersprechen,sind stabil und werden oft als absolut angesehen) verwendet.

TITELNUMMER: MP-1.2(10)

20 Hart,Kathleen;
30 /Secondary school children's understanding of Mathematics/.A Report of the Mathematics component of the Concepts in Secondary Mathematics and Science Programme.
40 Johnson,D.C.(Hrsg.);
41 Centre for Science Education,Chelsea College University of London;
50 London:Centre for Science Education/1980/.407 S.
56 pres.:engl.;
71 Math.258;

99 Diese Publikation bietet das Hintergrundmaterial des CSMS-Projekts (Tests,Auswertungsverfahren, forschungsrelevante Informationen) fuer den Gebrauch des Forschers.
Die Zusammenfassung der aus dieser Grundlagenstudie resultierenden Forschungsergebnisse ist in "Childrens Understanding of Mathematics: 11-16",Hrsg.Kathleen M.Hart enthalten (MP-1.2 (11),MP-4.0(05),MP-5.0(04),MP-6.0(18).

TITELNUMMER: MP-1.2(11)

30 /Childrens Understanding of Mathematics:11-16/.
Brown,M.L.(Hrsg.);
40 Hart,Kathleen(Hrsg.);Kuechemann,D.E.(Hrsg.);
41 CSMS Mathematics Team;
50 London:Murray/1981/.231 S.
54 0-7195-3772-X;
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-8;

99 Abschlussbericht des CSMS-Projekts (GB),fuer den Lehrer aufbereitet.
Zentrale Veroeffentlichung der neueren,pragmatisch orientierten math.Unterrichtsforschung.Ca.10 000 Schueler der (englischen) Sekundarstufe I sind in dieser komplexen Untersuchung mehrdimensional erfasst (durch Tests,Beobachtungen und Interviews).
Die Publikation enthaelt:
- eine Beschreibung des Forschungsprojekts
- die Versuchsergebnisse zu:
  - Groessen
  - Zahlenrechnen
  - Stellenwert und Dezimalzahlen
  - Brueche
  - positive und negative Zahlen
  - Verhaeltnisse und Proportionen
  - Algebra
  - Graphen
  - Spiegelungen und Drehungen
  - Vektoren und Matrizen
- einen uebergreifenden Auswertungsteil,der die Probleme der Altersentwicklung sowie hierarchische Studien und allgemeine Konsequenzen fuer den Mathematikunterricht umfasst.

Bei der Untersuchung stellten sich die enormen Schwierigkeiten deutlich heraus,welche Schueler in der Regel mit dem Mathematikunterricht haben - abgesehen von einer 10-15%igen Profigruppe.
Es zeigt sich auch,dass Schueler trotzdem mit den mathematischen Problemen fertig werden (wollen), dies aber meist auf anderen Wegen versuchen als der Lehrer (denkt).
Die Bedeutung der Untersuchung liegt darin,dass diese Thesen an konkreten Stoffen des normalen Unterrichts verifiziert werden.

TITELNUMMER: MP-1.2(12)

20 Robitaille,David F.;
30 /Intention,Implementation,Realization:the Impact of Curriculum Reform in Mathematics/.
51 /Journal of Curriculum Studies/,12/1981/4, S.299-306.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-41;

99 Es handelt sich um die Auswertung eines 300 item-Test ueber den (mathematischen) Schulstoff ies "Secondary level".Ausgewertet wurden Leistungstests und Lehrerbefragungen in British Columbia (Kanada) und diese mit Ergebnissen aus den USA verglichen.

Ergebnisse:

1)Die Mathematikreform hat kaum Auswirkungen gezeigt.
2)Algebra und computerunterstuetzte Uebungen werden zu lasten von Geometrie und in noch staerkerem Masse von Sachrechnen (consumer mathematics) betont.

Es wurde eine weitgehende Uebereinstimmung mit den in den USA festgestellten Ergebnissen nachgewiesen.

TITELNUMMER: MP-1.2(13)

20 Kieren,Thomas E.;
30 /On the Mathematical,Cognitive and Instructional/.
Foundations of Rational Numbers.
52 /Number of Measuremeant/,Georgia:Univ./1975/,
S.121-144.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-3;

99 Design:Didaktische Analyse auf dem Hintergrund
des derzeitigen empirischen Forschungs-
standes mit Folgerungen
fuer zukuenftige Forschungen.
Ergebnisse:
1) "Rationale Zahl" ist ein Konzept mit mehreren
Aspekten:
- Bruchaspekt
- Aequivalenzklassen - Aspekt
- Verhaeltnis
- Operator
- Quotient
- Groesse
- Dezimalaspekt
2) Jeder Aspekt ruft im Verstaendnis eigene kogni-
tive Strukturen auf und fordert eigene Lehr-
strategien.(Hierzu finden sich im Artikel de-
taillierte Tabellen).
3) Vermutung:
- Es ist falsch,curriculare Modelle unter
einem (hauptsaechlichen) Gesichtspunkt zu
entwerfen und die anderen von ihm aus herzu-
leiten;
- es ist ein "conglomerate model" zu fordern,
das auf ein Konzept der rationalen Zahl (am
Ende) zufuehrt.

TITELNUMMER: MP-1.2(14)

20 Hopf,Diether;
30 /Mathematikunterricht/.Eine empirische Untersuchung zur Didaktik und Unterrichtsmethode in der 7.Klasse des Gymnasiums.
50 Stuttgart:Klett-Cotta/1980/.251 S.
53 /Veroeffentlichungen aus dem Projekt Schulleistung. 4/
54 3-12-933260-X;
71 Dok 34-95;

99 onzeption und Inhalt:
Grundanliegen dieser Forschungsarbeit ist es, "den Mathematikunterricht in der 7.Klasse des Gymnasiums,vor allem seine methodischen Aspekte, aus der Sicht der Mathematiklehrer und vor dem Hintergrund ihres didaktischen Wissens zu beschreiben und zu diesem Zweck Daten auszubreiten,auf denen weitere Forschung gezielt aufbauen kann, die aber auch in der Lehreraus- und weiterbildung als empirische (und nicht als praeskriptive) Normenwerte eine sinnvolle Funktion erfuellen koennen."(S.18).
Dazu wurden zwischen 1968 und 1970 in einer repraesentativen Stichprobe an 417 Gymnasien der Bundesrepublik und in West-Berlin Mathematiklehrer der 7.Klasse mit einem speziellen Fragebogen befragt.
Es handelt sich dabei um einen Teil des interdisziplinaeren Projekts "Schulleistung",das von einer Forschungsgruppe um W.Edelstein konzipiert wurde.
Der zugrundegelegte Lehrer-Fragebogen erfasst hauptsaechlich folgende Bereiche:
- Rolle des Lehrbuchs
- Erarbeiten eines neuen Sachverhalts
- Form und Rolle von Uebungen

- Form und Rolle von Wiederholungen
- Unterrichtsstile
- Form und Rolle von Hausaufgaben
- Ziele und Inhalte in Klasse 7
- Form und Rolle von Unterrichtsorganisation, technischen Hilfsmitteln und Leistungsbeurteilung.

Die aus der Befragung fuer jeden Bereich hervorgegangenen Haeufigkeitesverteilungen werden mit Hilfe von Faktoranalysen untersucht.
Die Interpretation der Faktoren wird im Haupttext eng am Fragebogen gefuehrt.Vor allem die ausfuehrlichen Anmerkungen stellen die Ergebnisse in den Rahmen der einschlaegigen Unterrichtsforschung sowie der seit 1968 im Mathematikunterricht vor sich gegangenen Entwicklungen.
Der Fragebogen mit den Haeufigkeitsverteilungen der Antworten findet sich im Anhang,ebenso ein sehr ausfuehrliches Literaturverzeichnis.
Der Inhalt der vorliegenden Untersuchung bietet eine Fuelle von Einzelaussagen zum Lehrerverhalten im Mathematikunterricht.
Den Rahmen fuer diese Einzelergebnisse bildet die allgemeine,empirische abgesicherte Feststellung, dass die untersuchten Mathematiklehrer praktisch keine uebergreifenden methodischen Konzepte besitzen,dass Unterrichtsinhalte und -ziele fuer sich zu stehen scheinen und dass offensichtlich eine geringe "Ideologiebeduerftigkeit" der Mathematiklehrer besteht.

TITELNUMMER: MP-1.2(15)

20 Grudenov,Jakob I.;Horn,Aleksander Markovic;
30 /Typische Fehler in Schuelerarbeiten unter psychologischer Sicht/.
51 /Mathematik in der Schule/,15/1977/10,S.533-536.
71 MA-AA 00-42;

99 Feststellungen:
1)Perseverationsfehler (Fehlerwiederholung trotz Massnahmen,die die Fehlerwiederholung verhindern sollen) kommen sowohl in der Arithmetik wie in der Geometrie vor,vor allem,wenn lange (eintoenige) Aufgabenketten gerechnet werden und ploetzlich eine andere Aufgabe kommt.
2)Allgemeine,"plausible" Schluesse dienen oft zur Beantwortung von Aufgaben.
Beispiel:eine Geometrie - Aufgabe hat 3 Teilaufgaben a),b),c).
Bei a) ergibt sich "rechtwinkeliges Dreieck", bei b) ergibt sich "stumpfwinkeliges Dreieck", dann schliesst der Schueler,dass c) als Ergebnis "spitzwinklig" hat (ohne nachzurechnen!).

2.2 Dokumente zum Thema:
Verhältnisse/Proportion/Wahrscheinlichkeit

(Zugeordnete Abschnitte im Heft "Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: Proportion" sind vor allem 6.1, 6.2, 7.1, 9.1)

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetzer, Herausgeber
41 Korporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-2.0(01)

20 Karplus,Robert;Peterson,Rita W.;
30 /Intellectual development beyond elementary school.
2/.Ratio:a survey.
51 /School Science and Mathematics/,/1970/12, S.813-820.
56 pres.:engl.;
71 MA-AM 00-3;

99 Design:Loesen der "Mr.Short-Mr.Tall-Aufgabe(4:6)" mit schriftlichem Protokoll (Aufschreiben des Rechenwegs).
700 Schueler,4-18 Jahre (USA).
Bei der vielverwendeten Mr.Short-Mr.Tall-Aufgabe handelt es sich um folgendes Problem:
Der Proband sieht ein Strichmaennchen,genannt "Mr.Short" (Herr Klein),daneben 2 Masseinheiten,naemlich Ringe und Klammern.
Herr Klein misst 4 Ringe bzw.6 Klammern.
"Mr.Tall" (Herr Gross) misst 6 Ringe.
Wieviel Klammern misst er?
(Anmerkung:dieses Problem kommt in der Unterrichtsforschung auch variiert und erweitert vor,z.B.durch eine 3.Person (Herr Riese) oder mit anderen Objekten).

Ergebnisse:
1) 7 Kategorien von Antworten:
N (keine Erklaerung)
I (intuition)
IC(intuitive computation)
A (addition,hier z.B."plus 2")
S (scaling=Vergleich der Massskalen)
AS(addition and scaling)
P (proportional reasoning=Auffassen als ratios (Verhaeltnisse))

2) Bis 11 Jahre ueberwiegt I;A und S relativ stark
Ab 16 Jahre werden es in P 80% bei Vorstadtklassen,bei Stadtbevoelkerung nur 9%!!

3) Tendenz zu "glatten Verhaeltnissen" und glatten Ergebnissen (~ 1:2).

4) Es besteht ein ernster "gap" zwischen Schulmathematik und naturwissenschaftlichem Unterricht einerseits und den Denkfaehigkeiten der Schueler andererseits.

5) Hinweise auf Berechnungsverfahren als "hint" (=advanced organizer) helfen nicht,d.h.es handelt sich um echte Persoenlichkeitsstrukturen bei der Faehigkeit,prop.zu denken oder nicht.

TITELNUMMER: MP-2.0(02)

20 Karplus,Robert;Karplus,Elisabeth,F.;
30 /Intellectual development beyond elementary school.
3./Ratio:A longitudinal study.
51 /School Science and Mathematics/,/1972/11,
S.735-742.
56 pres.:engl.;
71 MA-AM 00-4;

99 Design:a)155 Schueler von 11-16 Jahren,die 1969
mit der Mr.Short-Mr.Tall-Aufgabe getestet
wurden,werden nochmals getestet (Retest).
b)200 Schueler von 13 Jahren werden zum
ersten Mal getestet.
Ergebnisse:(Zu den Abkuerzungen vgl.die Beschrei-
bungen der anderen Arbeiten der Karplus-
Gruppe)
1) Beim Retest treten die erwarteten Altersver-
schiebungen ein;es laesst sich nicht klaeren,
ob A und S in einer festen Hierarchie zuein-
ander stehen.
Folgende Piaget-Level ergeben sich:
I = I + IC (konkret)
II = S + A (transitional)
III =AS + P (formal)
2) Bei den 200 erstmals getesteten Schuelern werden
Einteilungen nach dem Lehrerurteil ueber die
allgemeine Mathematikleistung vorgenommen:
"fast","average","slow".
Diese Einteilung spiegelt genau den Grad des
Proportionalverstaendnisses wieder (von 90%
ueber 30% zu 0%).
3) Unklarheit,wodurch Prop.verstaendnis gefoerdert
wird.Zu empfehlen sind alle Arten von Mess-
experimenten.

TITELNUMMER: MP-2.0(03)

20 Karplus,Elisabeth F.;Karplus,Robert;Hollman L.Warren;
30 /Intellectual development beyond elementary school.
4./Ratio:The influence of Cognitive style.
51 /School Science and Mathematics/,/1974/10,
S.476-482.
56 pres.:engl.;
71 MA-AM 00-5;

99 Design:Mr.Short-Mr.Tall-Aufgabe (4:6),wobei jetzt
aber Mr.Tall "unsichtbar" bleibt.
616 Schueler,9-14 Jahre (USA).

Ergebnisse:

1) Es treten eine neue Kategorie IP und verschiedene Subkategorien von P auf:
IP (unvollstaendiges Rechnen mit Benutzen von Bruechen)
PC (Teilen der Figuren und Vergleichen der Klammergroessen)
AP (wie PC,dann noch addieren)
R (ratio)
2) Die neue Form des Tests regt das prop.Denken staerker an (hypothetischer Charakter foerdert "Mathematik-Reflex"),aendert aber die Altersabhaengigkeit nicht.
Die Subkategorien von P sind bei 13jaehrigen etwa gleich verteilt;Kategorie R wird nur von weniger als 16% erreicht.
3) Wenn prop.Denken nicht vorliegt,dann wird auf alternative Modelle zurueckgegriffen,die zur Verfuegung stehen und von einem besonderen Aspekt der Aufgabe angeregt werden;von persoenlichen Praeferenzen staerker abhaengig als vom Piaget-Level,auf dem sich die Person befindet.

270

4) Verwendung prop.Denkens auch abhaengig von numerischem Aspekt:
   3/2 foerdert additive Strategien,
   2/1 prop.Strategien,
   5/2 foerdert "approximative ratio" (2:1 oder 3:1).
5) "Hints" foerdern lediglich Trend zum Rechnen, nicht zur Prop.

TITELNUMMER: MP-2.0(04)

20 Wollmann,Warren;Karplus,Robert;
30 /Intellectual development beyond elementary school.
5/.Using ratio in differing Tasks.
51 /School Science and Mathematics/,/1974/11,
S.593-613.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-49;

99 Design:3 Aufgabengruppen:
1) Mr.Short-Mr.Tall-Typ auch mit anderen
Modellen (Kloetzen,Massstaeben etc.)
2) Bruchbilder ("Geometrie"),d.h.bildlich
vorgegebene Anteile sind in anderen Konfigu-
rationen zu schraffieren.
3) Partnersuche in differenzen - bzw.
qotientengleichen Zahlenpaaren.
("Numerik")
450 Schueler wurden getestet,je zur Haelfte
12-13jaehrige (USA).
Ergebnisse:

1) Erfoge bei 1) und 2) hoeher als in 3)
2) Nur 20% wendeten bestaendig prop.Methoden an,
25% schwankten unvorhersehbar.
Die Kategorien A,AS,IP sind solche schwankenden
Verhaltensbereiche ("Uebergangsbereiche"??)
3) Neben prop.Denken gibt es noch die propositionale
Logik (Variablenkontrolle);beides nur eingesetzt,
wenn entsprechend motiviert.
4) Addition wird bevorzugt,es sei denn,wenn in der Auf-
gabe andere Wortreize vorkommen ("wie oft sind
....enthalten?";.....ist ein Reiz fuer
'Division').
5) Bei Division wird der Rest am Schluss dazu
addiert:7 : 3 = 2 R1 = 3
("Ganze-Zahlen-Technik")

6) Forderungen fuer/Ursachen in der Schulmathematik

a) ratios (Verhaeltnisse) werden als Brueche eingefuehrt und proportions als aequivalente Brueche mit Standardregeln;
aber ratios sind fuer den Schueler nur "Assoziationen" von 2 (physikalischen)Objekten
und Divisionen lassen Reste!
(in der Bruchrechnung gibt es aber keine Reste).

b) Cuisenaire-Staebe etc.helfen viel besser und bieten auch eine Verbindung mit den Naturwissenschaften an.

c) Die "preoccupation" der Schulmathematik durch integers (ganze Zahlen) verhindert Zugang zu nicht-ganzen Groessen.

TITELNUMMER: MP-2.0(05)

20 Kurtz,Barry;Karplus,Robert;
30 /Intellectual development beyond elementary school. 7/.Teaching for proportional reasoning.
51 /School Science and Mathematics/,/1979/May-June, S.387-398.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-50;

99 Design:Die Untersuchung wurde an 14-15jaehrigen Schuelern aus 14 (Voralgebra-)Klassen durchgefuehrt;es handelt sich um ein Numerical Relationships (NR)-Programm, bestehend aus 16 Unterrichtsstunden.Vier Lehrer,die jeweils eine Klasse mit vollem NR-Programm und eine Klasse mit verkuerztem NR-Programm (ohne manipulative Teile) unterrichteten,lieferten neben sechs weiteren Lehrern,die nach traditioneller Methode unterrichteten,die der Analyse zugrunde liegenden Daten.Der Text enthaelt eine detaillierte Schilderung des NR-Programms sowie nuetzliche Unterrichtshinweise.

Ergebnisse:

1) Bei Anwendung des NR-Programms zeigen sich erhebliche Zugewinne im proportionalen Denken (bei gleichzeitiger Unveraendertheit in den Kontrollklassen).
2) Gleichungen vermitteln keine neuen Einsichten fuer den Schueler;daher werden hier auch keine langdauernden Gewinne an spezifischer Leistungsfaehigkeit feststellbar.
3) Vorschlaege:
   a) NR-Programme sind empfehlenswert!
   b) Proportionale Themen sollen nicht isoliert behandelt werden oder lediglich in einfachem, nicht erhellendem Kontext vorgestellt werden.

TITELNUMMER: MP-2.0(06)

20 Karplus,Robert;Formisano,Marina;Paulsen,
Albert-Christian;
30 A /Survey of proportional reasoning and control of
variables in seven countries/.
51 /Journal of Research in Science Teaching/,14/1977/
5,S.411-417.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-48;

99 Design:Mr.Short-Mr.Tall-Aufgabe wurde in versch.
Laendern der Erde durchgefuehrt und nach
Strategien ausgewertet(DID:MP-2.0(01).

Ergebnisse (hier nur fuer die Bundesrep.Deutschland wiedergegeben):

1) Am Gymnasium prop.Denken signifikant (Jungen und Maedchen),an RS nur bei Jungen.
An HS fuer Jungen und Maedchen wenig signifikant.
2) Maedchen bevorzugen additive Strategien.
3) Zwischen 13-15 Jahren fehlt einem bedeutenden Anteil der Schueler prop.Denken und Variablenkontrolle.
Der Unterricht kann grossen Einfluss ausueben.
4) Forderungen:
- Unterschiede der Schueler durch Inhaltsauswahl,praktische Versuche und Textbuchwahl beruecksichtigen
- Tips: - Aufmerksamkeit der Schueler auf ihr eigenes Denken richten und Denkwege samt Ergebnissen ueberlegen lassen;
- Denkformen,die in den Naturwissenschaften vorkommen,beachten
- aktive Patizipation der Schueler;
- konkrete Erfahrungen am Beginn neuer Gebiete sammeln.

148

TITELNUMMER: MP-2.0(07)

20 Easley,John;Travers,Kenneth;
30 /Expanded Abstract and Analysis of the "Karplus Studies"/.
51 /Investigations in Mathematics Education/,/1976/ 9,S.34-42.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-51;

99 Ueberblick ueber die verschiedenen Arbeiten von Karplus (u.Mitarbeitern):
1) Es wird auf den Unterschied zwischen dem Vorgehen von Piaget (Klinische Interviews mit Probieren und Verbessern seitens des Probanden) und dem von der Karplus-Gruppe (Papier- und Bleistift-Test ohne Interviews) hingewiesen.
2) Beide Forschungsrichtungen zeigen daher verschiedene,aber gleich wichtige,Aspekte:
- Formen der Denkentwicklung (Piaget)
- Formen des Denkens,vor allem des spontanen Vorgehens (Karplus).

TITELNUMMER: MP-2.0(08)

20 Karplus,Robert;Pulos,Steven;Stage,Elizabeth,K.;
30 /Early adolescents' Structure of proportional reasoning/.
52 /Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education/, Berkeley:Univ./1980/,S.136-142.
56 pres.:engl.;
71 Archiv;MA-AA 00-52;

99 Design:a)Sirup-Mischungen im Geschmack vergleichen; angeg.sind die Mischungsbestandteile.
b)Bei "ungleichen" Mischungen einen "Partner" so suchen,dass die Mischungen "gleich" werden.
c)Versuchspersonen:60 6-th grader,60 8-th grader, Zufallsauswahl, Mittelklasse - Vorstadt - Schule
d)8 Items mit "gleicher" Mischung, 8 Items mit "ungleichen" Mischungen.

Ergebnisse:

1) Scores (Strategie-Typen):
I = vermuten
Q = qualitativer Vergleich: "mehr","weniger"
A = additiver Vergleich
R = Vergleich unter Einbeziehung von Verhaeltnissen(ratios)

2) Bei "gleicher Mischung" arbeiten 43% mit R u.23% mit A,aber bei "ungleicher Mischung" genau umgekehrt.Das gilt auch fuer die Partnersuche.
Etwa 20% "fluktuieren" zwischen R u.A,vor allem wenn sich die numerische Qualitaet der Groessen veraendert.

3) a)Im Mittel verwenden 60% der Schueler Intern-Strategien,20% Extern-Strategien (= direkter Vergleich verschiedener Sirup-Mischungen).

b)Aber:
Wenn das Verhaeltnis "aufgeht",dann verwenden 75% Extern-Strategien,sonst 60-90% Intern-Strategien.

4) Wenn die Verhaeltnisse aufgehen und gleich sind, verwenden 60% Proportionalstrategien (erfolgreich);dieser Prozentsatz sinkt (bis auf 10%), wenn die Verhaeltnisse ungleich werden und/oder nicht aufgehen.

5) Folgerungen:
Eine grosse Gruppe zeigt folgendes Verhalten:
a) Sie suchen Intern-Beziehungen
b) Sie suchen "Bruch-Vermeidungs-Strategien", kennen aber die Proportionalmethode als angemessen.Insofern zeigen sie ein unstabiles Verhalten.
c) Das "Aufgehen" von Verhaeltnissen ist ein Schwierigkeitskriterium und ein "Umschaltkriterium".
d) Brueche vermeiden ist wichtiger als math. Angemessenheit der Strategie.
e) Proportionales Denken ist kein (zwangslaeufiges) Ergebnis der Entwicklung,sondern haengt vom Zustand der Aufgaben ab.

Ergaenzende Forschungen:

Cognitive Correlates of Proportional Reasoning in early Adolescence;Pulos/Stage/Karplus,a.a.O., S.143-149

1) Schueler aus 6th grade/8th grade;Design:Testkorrelation.
2) Kompetenz im prop.Denken ist stark abhaengig von der Faehigkeit,Informationen zu verarbeiten und miteinander in Beziehung zu bringen.
3) Gebrauch der prop.Strategie ist stark abhaengig von der Faehigkeit,zu "verschluesseln"(cognitive restructuring and fluid ability).

4) Juengere weibliche und additiv denkende Schueler sowie aeltere,maennliche und prop.denkende Schueler haben je dieselbe Grundeinstellung zur Schule und Mathematik.
(vgl.hierzu:Social Context of Early Adolescents' Proportional Reasoning:Stage/Karplus/Pulos,a.a.O., S.150-156).

TITELNUMMER: MP-2.0(09)

20 Pulos,Steven;Stage,Elizabeth K.;Karplus,
Elizabeth I;
30 /Spatial visualization and proportional reasoning
of early adolescents/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble:
Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.237-242.
71 MA-AA 00-45;

99 Design:Schueler der 6.u.8.Klasse loesen prop.
Aufgaben (Limonadenmischungen vergleichen)
und Aufgaben ueber Papierfalten (vor den
Augen der Schueler wird Papier gefaltet,
auf dem gefalteten Papier wird ein Punkt
makiert und dort ein Loch gedacht;die
Schueler sollen dann am ungefalteten Papier
die Lage der Loecher einzeichnen).
Es werden Korrelationsuntersuchungen
zwischen diesen Testbloecken gemacht,
ausserdem Kontrollanalysen mit anderen
einschlaegigen Tests.

Ergebnisse:

(1) Es gibt eine spezielle Beziehung zwischen
flaechiger Wahrnehmung und prop.Denken;
beides scheint sich gegenseitig zu erleichtern.
(2) Es wird vermutet,dass problemloesendes Denken
der gemeinsame Hintergrund ist,moeglicher-
weise auch die Breite des Wahrnehmungsfeldes.

28)

TITELNUMMER: MP-2.0(10)

.0 Noelting,Gerald;
30 The /development of proportional reasoning and the ratio concept/.Part I Differentation of stages.
51 /Educational Studies in Mathematics/,11/1980/, S.217-253.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-53;

99 Der Beitrag gibt zunaechst eine Forschungsuebersicht zum Erkenntnisstand bei der Entwicklung des prop.Denkens.
Folgende Merkmale werden hierbei hervorgehoben:

-> Altersabhaengigkeit:Kompetenz im prop.Denken ist erst im spaeten Jugendalter entwickelt.

-> Argumentationsweisen (von den zugehoerigen Aufgabentypen) kennzeichnen die "gestufte" Altspyramide.
Daher sind bestimmte Probleme nur fuer bestimmte Stufen als "advanced organizers" geeignet,nicht fuer alle Stufen.

-> "Proportion" hat viele Aspekte (grafisch,symbolisch,...)
Bei juengeren Schuelern sind diese Aspekte kaum verbunden.
Je nach dem Probleminhalt treten die Aspekte verschieden hervor.
(vgl.Kieren,T.E.:On the Mathematical,Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers, 1975).

Dann stellt der Beitrag umfangreiche eigene Versuche vor:

(1) Design:Vergleich von Saftmischungen aus
Wasser und Sirup:"Was schmeckt
'more orangy' und warum?"
321 Schueler,6-16 Jahre (Quebec/Kanada),
obere Mittelklasse;23 Items mit unter-
schiedlichen Mischverhaeltnissen.

(2) Ergebnisse:

Es ergibt sich eine gestufte Schwierigkeits-
hierarchie; diese Schwierigkeitshierarchie
entspricht grob der Altershierarchie.

a) Stufen der Hierarchie:

	Wasser/Sirup		
I Typ:	(a/c)	vs.	(a/d)
	(c/a)	vs.	(d/a)
	(c/a)	vs.	(b/b)
II Typ:	(a/a)	vs.	(b/b)
	(a/b)	vs.	(ka/kb);k=1/2; 2
III Typ:	(a/b)	vs.	(c/d),wobei a ein "erkennbares Vielfaches/Teiler von c"
	(a/b)	vs.	(e/d),wobei b-d=a-c=1
	(a/b)	vs.	(c/d)allgemeiner Typ

10-12 Jahre:breite Streuung,ca.30% in Stufe III
(Anfang)
ab 12 Jahre:~ 60% bis Stufe III
ab 14 Jahre:~ 80% bis Stufe III
ab 16 Jahre:~ 90% bis Stufe III,davon die Haelfte
bis zum allgemeinen Fall.

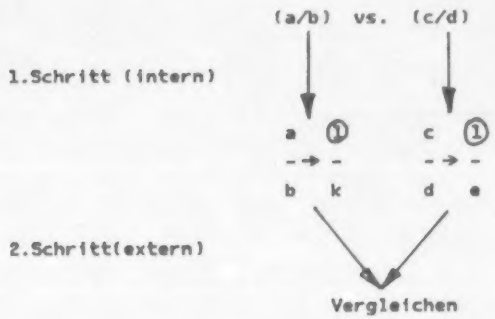
b) Argumentationsformen:

(1) bis Stufe I: nur deskriptiv,"intuitiver
Vergleich"

(2) bis Stufe II:"mehr Wasser links als rechts",
"gleicher Betrag an Sirup",
"wenn man abzieht....,
dann bleibt uebrig....".
Hier kommen auch noch
Aufteil-Strategien vor:
(4/2) = (2/2) + (2/0)
(2/1) = (1/1) + (1/0)

(3) Uebergangsstrategien zu III:
Es werden Vergleiche zwischen allen 4
Variablen angestellt:
- oft werden Wasser/Sirup intern abgeschaetzt und dann extern in den Mischungen verglichen
- oder ein gemeinsamer "Vergleichspunkt" gesucht ("in beiden Mischungen ist 1 Glas Wasser weniger als Sirup").

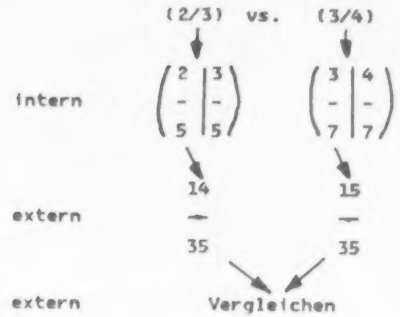
(4) Stufe III:
Hier wird mit Verhaeltnissen und/oder Anteilen gerechnet.Alle anderen Strategien versagen bzw.sind problematisch.
Die in Stufe III besonders erfolgreichen Schueler gehen so vor:



Noelting weist darauf hin,dass das schulische Vorgehen oft umgekehrt ist:
Zuerst wird ein Hauptnenner fuer beide Anteile gesucht (extern),dann jeder Anteil erweitert (intern),dann wieder verglichen (extern).
Noelting plaediert fuer die Festigung von Internstrategien und die interne Verarbeitung von Verhaeltnissen,z.B.so,dass ein Bestandteil die Einheit wird (unit factor method).

(5) Stufe III "oben" (allgemeiner Fall)

Hier ist folgende Strategie erfolgreich (Beispiel):



In der Schule wird diese Beziehung "Bruch <> Verhaeltnis" vernachlaessigt.

Die Ueberlegung: (2 Teile 3 Teile)

Zusammen 5 Teile

also:2 Teile = 2/5

3

3 Teile = -

5

ist eine wichtige Strategie zur Erlangung prop. Denkens.

(6) Argumentationsformen der Stufe III:
Es faellt auf,dass Schueler,die in Stufe III erfolgreich sind,bei den einfacheren Aufgaben auch die einfacheren Methoden verwenden,sie aber an je geeigneten Stellen mit Proportionalmethoden "durchschiessen".

TITELNUMMER: MP-2.0(11)

20 Noelting,Gerald:Gagne,Louis;
30 The /development of proportional reasoning in four different contexts/.
52 /Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education/, Berkeley:Univ./1980/,S.126-135.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-52;

99 Design:Es werden folgende Aufgabentypen gestellt:
- Orangensaft vergleichen
- Kekse auf Kinder verteilen und vergleichen
- Brueche vergleichen
- Brueche addieren

An 149 Schuelern des 6th grade (12) und der Sec.I-V (13-17)wurden Daten fuer eine Korrelationsuntersuchung erhoben.

Ergebnisse:

-> bei "Orangensaft" u. "Kekse verteilen" bestaetigt sich die Untersuchung in Educational Studies 11/1980,aber bei "Kekse verteilen" spielt der Gesichtspunkt "intern/extern" eine noch hoehere Rolle (2 Groessenbereiche!!)
-> Keine signifikante Korrelation je Person zwischen den 4 Repraesentationsformen des gleichen Problems.
-> Bei den Bruchproblemen keine den Proportionsproblemen entsprechende Altersverteilung,auch keine so stringente Stufung.

TITELNUMMER: MP-2.0(12)

20 Noelting,Gerald;Gagne,Louis;
30 A /learning hierarchy for ratios and fractions/.
52 /Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education/, Berkeley:Univ./1980/,S.292-302.
56 pres.;engl.;
71 MA-AA 00-52;

99 Design:ca.150 Schueler im Alter von 10-15 Jahren sollten die Probleme loesen:
O : Orangensaft - Geschmacksvergleich bei angegebenem Mischungsverhaeltnis
P : Keksverteilung
BV: Bruchvergleich
BA: Bruchaddition

Ergebnisse:

(1) - Keine direkte Korrespondenz zwischen O,P einerseits und BV,BA andererseits;
- BV,BA koennen in einfachen Faellen die meisten Schueler;trotzdem ist die Leistung bei O,P niedriger und entwickelt sich altersmaessig langsamer.

(2) Abschliessend zieht Noelting einige Folgerungen aus seinen seitherigen proportionsbezogenen Forschungen:

1)Die Art der Beziehungen zwischen den 4 Komponenten von 2 Verhaeltnissen bestimmen stark die Schwierigkeit des Problems.

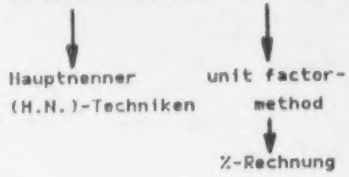
2)Folgende Aspekte von "ratio between quantities" sind wichtig:

2 Glaeser in 5 Glaesern	→partition of a set
2/5 in jedem Glas	→fraction of a unit
2 : 3	→proportion

3)Echte und unechte Brueche gleich(zeitig) als rationale Zahlen behandeln.
Ratio oft "unecht";daher verwirrt die gemischte Zahl.

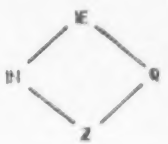
4)Unterscheiden von external ratio/internal ratio

und dementsprechend:



5)Stammbrueche und deren Aequivalenzklassen sind grundlegend,vor allem fuer unit-factor-method (internal) und den Uebergang zu external methods (ueber die Aequivalenz).
-> viel Zeit fuer 1/3 + 2/9 - Typen aufwenden

6)Zahlenaufbau in "natuerl.Hierarchie":



(Egyptian numbers: Nat.Zahlen + Stammbrueche)

7)H.N.-Methode und "reduction to unit" als inverse Strategien auffassen.

->Gleichzeitig Auswertung von:
Noelting,G:The Development of Proportional Reasoning in the Child and Adolescent through Combination of Logic and Arithmetic.(1) Proceedings of the Second Intern.Conf.for the Psychology of Mathematics Education, 1978,S.242-277.

TITELNUMMER: MP-2.0(13)

20 Hart,Kathleen;
30 /Strategies and errors in secondary mathematics - the addition strategy in ratio/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble: Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.199-202.
71 MA-AA 00-45;

99 Design: Schueler,die prop.Aufgaben additiv loesen (13-15 Jahre),wurden mit Problemen der Vergroesserung von Figuren konfrontiert, interviewt,beobachtet und anschliessend therapeutisch unterrichtet.

Ergebnisse:

(1) Die Schueler erkannten,dass additives Vergroessern keine Aehnlichkeit ergibt.Aber sie fanden keine Methode anstelle des Addierverfahrens.
(2) "Additive" Schueler vermeiden ueberhaupt Multiplizieren,erst recht Rechnen mit Bruechen.
(3) Therapie ist wenig erfolgreich;es kann jedoch eine optische Vorstellung von "Aehnlichkeit" vermittelt werden (Zusaetzliche muendlichee Information des Autors,PME-Kongress Grenoble 1981).

TITELNUMMER: MP-2.6(14)

20 Hart,Kathleen;
30 /Mistakes in Mathematics/.
51 /Mathematics Teaching/,/1978/85,S.1-3.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-54;

99 Zusammenfassung einiger wichtiger Grundergebnisse des CSMS-Projekts (Chelsea College,London) an ca.10 000 Schuelern des secondary level:
- Umgang von Schuelern mit Verhaeltnissen
- Umgang von Schuelern mit Bruechen.
(Diese Ergebnisse sind ausfuehrlicher dargestellt in:K.Hart,Children's Understanding of Mathematics: 11-16,London 1981,Titelnummer:MP-3.0(05)).
Durch Interviewbeispiele wird die zentrale These herausgearbeitet,dass der math.Schulunterricht haeufig seine zentralen Konzepte dem Schueler gar nicht vermittelt.

TITELNUMMER: MP-2.0(15)

20 Wollacott,Charles F.;
30 /Some important influences on the teaching of probability to young children/.
50 London:Univ./1978/.106 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AM 10-3;

99 Didaktische Analyse empirischer Forschungsergebnisse mit Folgerungen fuer den Unterricht in Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Die Untersuchung weist den engen Zusammenhang zwischen der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsvorstellung und der Proportionsvorstellung auf, weist aber auch auf Konzepte hin,die noch hinzukommen muessen:So z.B.die Vorstellung vom Versuchsumfang,vom Zufall und von der Verteilung des Zufalls.(vgl.auch die Arbeiten von Schupp:MP-2.0(17), MP-2.0(32) und MP-2.0(34)).
Schliesslich betont die Arbeit die individuell unterschiedliche Entwicklung der Kinder unbeschadet der Existenz von einheitlichen Entwicklungsstufen (vgl.die Arbeiten von Noelting MP-2.0(10)-(12) und Fischbein.MP-2.0(29)). .

TITELNUMMER: MP-2.0(16)

20 Mueller,David;
30 Perceptual reasoning and proportion/.
51 /Mathematics Teaching/,/1979/,S.20-22.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-55;

99 An Untersuchungen bei 5-12jaehrigen Kindern zum Erfassen und Berechnen von Proportionen an figuralen Groessenverhaeltnissen zeigt sich,dass die Wahrnehmungsfaehigkeit eine entscheidende Rolle spielt.
Math.Konzepte - speziell die der Proportion - sollten daher ueber das wahrnehmende Verstehen eingefuehrt werden und so dem Bemuehen der Kinder dienen, Ordnung in ihre Welt zu bringen.

TITELNUMMER: MP-E 0(17)

20 Schupp,Hans;
30 /Evaluation eines Curriculums/.
51 Der /Mathematikunterricht/,25/1979/5,S.22-42.
71 MA-AM 10-5;

99 Es wird ueber einen (begleiteten) Unterrichts-
versuch "Stochastik"(Hauptschule Kl.7,350 Schueler)
berichtet (vgl.Schupp(1976) und Schupp (1978)).
1)Curricularer Aufbau
1)Galton-Brett/Mittenbevorzugung
2)Andere stochastische Geraete und Situationen
3)Erste Loesung des Problems der Mittenbevor-
zugung durch Einfuehrung des Wahrscheinlich-
keitskonzepts
4)Anwendung:Wahrscheinlichkeits-Verteilung bei
einfachen Zufallsexperimenten.

Ziel:Erreichen "stochastischer Sensibilitaet".

2)Erste Ergebnisse
- positive Grundakzeptanz
- grosse Schwierigkeiten bei Phase 4,vor allem
bei mehrstufigen Zufallsexperimenten und beim
Mathematisieren (u.a. mangelnde Vorkenntnisse
ueber Brueche und Verhaeltnisse)
- viel Zeit und Energie,um beim Schueler einen
genuegend weiten Zufallsbegriff aufzubauen,
vor allem auch,um vom mitgebrachten Begriff
"Zufall=Willkuer" wegzukommen.
3)Konsequenzen fuer das Curriculum:
- von Anfang an die Begriffe "Zufall" und "Zu-
fallsexperiment" benutzen;
- in Massensituationen Schueler selbst Daten
beschaffen lassen,da hier prinzipielle
Gleichwertigkeit mit Zufallserscheinungen
besteht;

166

- Simulieren von Situationen als durchziehende Idee;macht den Schuelern Spass und faellt unerwartet leicht;
- Aufnehmen der Stochastik in einen langfristigen Gesamtlehrplan.

TITELNUMMER: MP-2.0(18)

20 Brink,Jan van den;Streefland,Leen;
30 /Young children(6-8).Ratio and proportion/.
52 /Proceedings of the second international conference for the psychology of mathematics education/, Osnabrueck:Univ./1978/,S.91-107.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-35;

99 Design: Interviews mit 6-8-jaehrigen an Bildern mit Groessenverhaeltnissen (richtige und entstellte)

Ergebnisse:
(u.a. auch aus Arbeiten von Freudenthal gefolgert)

-> Kinder haben eine Grundvorstellung von "Kongruenz" und "Aehnlichkeit" (lageunabhaengig) als "operationale Aequivalenz",die in Groessenverhaeltnissen (z.B."so gross wie ...") ausgedrueckt wird.
Daher sind fuer sie Proportionen an Situationen gebunden und an wohlunterschiedene Objekte in diesen Situationen.

-> Das "aeussere" Verhaeltnis (zwischen Objekten) geht dem "inneren" Verhaeltnis (an einem Objekt) voran.

Vorschlaege:

-> Anliegen: durch Situationen beide Verhaeltnisformen foerdern.

-> Method.Vorschlaege:

(a) "mad" situations (Verzerrungen)
(b) An einem Foto den Fotografen - Standpunkt ausmachen
(c) Sich in ein Foto einordnen
(d) Einen Gegenstand mit mehreren Merkmalen betrachten und abschaetzen,ob die Groessenverhaeltnisse stimmen koennen,- dann diesen Gegenstand in Beziehung zu einer neuen Bezugsgroesse setzen (z.B.Haus als Puppenhaus deklarieren).

TITELNUMMER: MP-2.0(19)

20 Nelson,Katherine J.;Zelniker,Tamar;Jeffrey,Wendell E.;
30 The /Child's Concept of Proportionality:A Re-examination/.
51 /Journal of experimented child psychology/,/1969/ 8,S.256-262.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-56;

99 Design:Wiederholung der Versuche von Bruner und Kennedy aus dem Jahre 1966 an 5-7jaehrigen Kindern (USA).
An teilweise gefuellten Glaesern sollten sie abschaetzen,ob sie 1/4,1/2,3/4 gefuellt waren.Den Fragen gingen Instruktionen voraus.

Ergebnisse:

- obwohl die meisten Kinder richtig antworteten, gingen erst die aelteren Kinder mehr von proprotionalen Ueberlegungen aus;
- eine entscheidende Rolle spielte die Klarheit und Unmissverstaendlichkeit der Fragen und Versuchssituationen;
- die Kinder lernten viel durch Training.

TITELNUMMER: MP-2.0(20)

20 Steffe,Leslie P.;Parr,Robert B.;
30 The /Development of the Concepts of Ratio and Fraction in the Fourth,Fifth,and Sixth Years of the Elementary School/.
41 Wisconsin Research and Development,Center for Cognitive Learning;University of Wisconsin;
50 Wisconsin:Univ./1968/.43 S.
53 /Technical Report.49/
71 MA-AA 00-57;

99 Design: a)2 Schuelergruppen (je ca.150 Schueler) der Klassen 4-6 (USA) wurden nach unterschiedlichen Curricula im Umgang mit Bruechen und Verhaeltnissen unterrichtet. Einmal wurde mehr der Verhaeltnisaspekt betont,einmal mehr der Bruch- und Quotientenaspekt.

b)Die Schueler fuehrten Tests durch,in denen sie zu geg.Verhaeltnissen bzw.Bruechen gleiche Verhaeltnisse bzw.Brueche finden sollten. Die Tests waren z.T.mehr bildlich,z.T. mehr symbolisch (numerisch) angelegt. Es waren fehlende Nenner bzw.Zaehler zu finden.

c)Die Testauswertung geschah nach IQ-Gruppen (hoch,mittel,niedrig) und insgesamt.Benutzt wurden u.a. Auswertungen nach Schwierigkeitsgraden und Korrelationsuntersuchungen.

Ergebnisse:

(1) Zwischen der Faehigkeit,den bildlichen Test zu loesen und der Faehigkeit,den symbolisch-numerischen Test zu loesen,gibt es kaum Korrelationen.

(2) Bildliche Problemstellungen werden durch "visuelle Inspektion" geloest.
(3) Wenn die visuelle Inspektion nicht zur Loesung fuehrt,werden proportionale Probleme extrem schwierig (ausgenommen die Gruppe aus Kl.6 mit hohem IQ).
(4) Wird der "Nenner" eines Verhaeltnisses bildlich gesucht,so wird er leichter gefunden, wenn das Bild eine Verhaeltnis-Situation als eine Bruch-Situation wiedergibt.
(5) Je hoeher der IQ,umso hoeher die Faehigkeit, mit Proportionalitaeten umzugehen.
(6) Mit zunehmendem Alter waechst die Faehigkeit, die vorgelegten Tests zu bearbeiten,deutlich.

Vorschlaege:

(1) Der math.Repraesentation visueller Daten muss in der Proportionen- und Bruchlehre viel mehr Sorgfalt gewidmet werden.
(2) Spezielle Aufmerksamkeit und viel Zeit brauchen die Schueler mit mittlerem und niedrigem IQ (ca.40% - 50% der Population).

TITELNUMMER: MP-2.0(21)

20 Floer,Juergen;
30 /Untersuchungen zur Entwicklung und Foerderung des Verhaeltnisdenkens bei Kindern/.
50 Bamberg:Schadel/1977/.223 S.
71 MA-AA 00-33;

99 Design:Mehrere Versuche an Gruppen von Kindern aus Vorschule,HS,Gy,GS bis 13 Jahre (alle noch ohne explizite Bruchrechnung). Testaufgaben:Sirup - Vergleich u.a.in verschiedenen ikonischen Formen;ausserdem Chancen-Vergleich.

Ergebnisse:

1)Der Weg zum Verhaeltnisdenken hat folgende Etappen:
- nur 1 ins Auge fallende Groesse wahrnehmen (meist die Sirupmenge);
- Versuch,mehrere Wahrnehmungsdimensionen zu erfassen
- Multidimensionalitaet des Problems erkennen (evtl.verbunden mit erneuter Verunsicherung)
- Verhaeltnisdenken als Erkenntnis der Invarianz von Zahlenpaaren

2)Die Etappen sind grob gesehen Altersstufen,aber mit grossen individuellen Unterschieden.

3)Die Schueler klammern sich stark an Groessen und Groessendifferenzen und blockieren sich so fuer Verhaeltnisstrategien.
Auch starke Bindung an ikonische Repraesentationen.

4)Nur gezielter Unterricht verbessert die Leistung und erzeugt evtl.(bescheidenen) Transfer:Operator- und Anteilmethode gleich effizient.

5)Es ist kaum moeglich,zu beschreiben ,wie sich die "4 Groessen" zu einem Verhaeltnisbegriff verdichten.Deshalb hier keine methodischen Rezepte aufstellen.

Vorschlaege fuer den Unterricht in Verhaeltnisdenken:

1)Vertrautheit mit Groessen
2)Situationen,die mit Handlungen und Ueberlegungen des Kindes korrespondieren,sind unerlaesslich. Mengentheoretische und algebraische Ansaetze helfen kaum weiter.
3)Spiralig,ueber lange Zeit erarbeiten und vertiefen.Die verschiedenen Aspekte des Verhaeltnisbegriffs entfalten.
4)-Viele ikonische Repraesentationen desselben Phaenomens waehlen (z.B.Urne/Glueckszrad/ Streckenverteilung).
-Problem "Zahlenstrahl"|
Er hat Punkte und fuer den Schueler keinen Streckenverteilungscharakter.
(vgl.hierzu auch die Untersuchungen von G.Vergnaud/P.Errecaldeu.a.,1980; Titelnummer:MP-4.0(12)).

TITELNUMMER: MP-2.0(22)

20 Leddy,Tom;
30 /Direct proportion/.The application of Dienes' theories to a traditional topic.
51 /Mathematics School/,8/1979/1,S.24-25.
56 pres.:engl.;
71 MA-GR 30-3;

99 Interessante Spiele und Uebungen zu den verschiedenen Aspekten der Proportionalitaet;der Aufsatz entstand aus der Arbeit des Autors in der Lehrerausbildung.Die Theorie von Dienes wird mit konkreten Inhalten gefuellt:drei Spiele werden beschrieben (Bingo,Rennen,Kartenspiel),die geeignet sind,direkte Proportion anzuwenden. Abschliessend werden Begriffe genannt, die Moeglichkeiten bezeichnen,die direkte Proportion an verschiedenen realen Objekten und in realen Situationen zu wiederholen.

TITELNUMMER: MP-2.0(23)

20 Chapman,Robert H.;
30 The development of childrens understanding of proportions/.
51 /Child Development/,46/1975/,S.141-148.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-59;

99 Design:2 Urnen mit je gemischten Farben:
Chancenvergleich.Eine Untersuchung an
6-11jaehrigen Schuelern(USA,1975).

Ergebnisse:

(1) Anzahl der richtigen Entscheidungen waechst mit dem Alter

(2) Trotzdem:die Mehrheit aller Entscheidungen faellt durch Differenzberechnungen;
der Anteil der "Proportionalentscheidungen" im Sinne "richtige Differenzvergleiche der 4 beteiligten Groessen" nimmt bis 11 Jahre auf ca.60% zu;bei College-Studenten 92%|

(3) Der Prozentsatz der Schueler,die 1 Farbe in jeder Urne vergleichen (also 2 der 4 beteiligten Groessen beruecksichtigen),ist am Anfang hoch,er sinkt von 80% auf 40% bei 11jaehrigen.

(4) Kinder haben ein logisches Verstaendnis von Proportionen,ohne ihre probabilistischen Entscheidungen aber auf Verhaeltnisse zu gruenden.

Das wird noch auf folgende Weise abgesichert:

a) Kinder,die gut dividieren koennen,setzen diese Faehigkeiten ueberhaupt nicht ein;
b) Aufgaben mit gleichen ratios,aber ungleichen Gesamtzahlen in den beiden Urnen,sind besonders schwierig.
Auch wenn entsprechend Kugeln hinzugefuegt oder weggenommen werden,verwirrt dies.

TITELNUMMER: MP-2.0(24)

20 Lawson,Anton E.;Wollmann,Warren T.;
30 /Developmental level and learning to solve problems of proportionality in the classroom/.
51 /School Science and Mathematics/,/1980/1, S.69-75.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-60;

99 Design: 28 Schueler im Alter von 12-14 Jahren werden einem Vortest,anschliessender Instruktion und einem Nachtest unterworfen.
Der Test und Unterricht bezog sich auf Feststellen,Abschaetzen,Vergleichen und Berechnen von Verhaeltnissen.

Ergebnisse:

- Die Entwicklung prop.Denkens ist mit der formalen Denkstufe (i.S.v.Piaget) eng gekoppelt. Die Entwicklung formaler Operationen ist eine Voraussetzug fuer das Erreichen der math.Proportionskonzepte.
- bei gleichem Alter gibt es hier voellig unterschiedliche Entwicklungsstufen.
- das Finden entsprechender Lernarrangements ist eine noch ungeloeste Forschungsaufgabe.Sicher scheint aber zu sein,dass ohne experimentelle und konkrete Instruktion ueberhaupt kein Fortschritt in der Entwicklung des prop.Denkens eintritt.

TITELNUMMER: MP-2.0(25)

20 Rees,Ruth;Furneauz,W.D.;
30 The /Dimensions of Mathematical Difficulties/.
A set of problems proving more difficult than
teachers expect at all levels in the educational
system.
50 Uxbridge:Brunel Univ./1976/.11 S.
53 /Brunel University Department of Education,
Occasional Publication Series.1/
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-61;

99 Design:- 50-Item-Test aus versch.Gebieten der
S-I-Math.,erprobt an Schuelern der
Abschlussstufen (O-Level) sowie an
Studenten (GB)
- Auswertung nach Schwierigkeitsgrad
und Durchfuehrung einer Faktorenanalyse(FA).

Ergebnisse:

(1) Es gibt 2 wesentliche Faktoren in der FA:
(a) Numer.Rechnen,Geometrie(Kongruenz)
(b) Common core,das sind Items ueber
- Umwandeln von Bruechen in Dezimalzahlen
- Proportionalitaet und Aehnlichkeit
(Textaufgaben)
- Umrechnen von Groessen
(2) Der common-core-Faktor besteht aus Items,
die ueberdurchschnittlich schwer sind,von
Lehrern aber nicht als so schwer einge-
schaetzt werden.
-> Ergaenzende Untersuchungen (publiziert in
Psychologie of Mathematics Education 1978 und
1979,Archiv-Nr.MA-AA 00-35 und -36):

- "mathematisch" erscheinende Probleme floessen Schulern mehr Angst ein als allgemein erscheinende;
- es wird bei math.Problemen von Schulern zuerst ein Algorithmus gesucht;er floesst Vertrauen ein,foerdert aber nicht das Verstaendnis.
  So suchen z.B.bei der Gleichung $\frac{1}{X} = \frac{3}{4}$ juengere Schueler (13 Jahre) meist aequivalente Brueche. Erst aeltere Schueler und Studenten gehen ueber eine Gleichung.

TITELNUMMER: MP-2.0(26)

20 Ford,Elinor Rita;
30 The /Spectrum of Proportion Mastery among New York Parochial School Children/.
50 London:Columbia Univ./1974/.256 S.
56 pres.:engl.;
71 Dok 7637;

99 Design:Vergleichsuntersuchung;180 Schueler 4th-9th grade (10-16 Jahre) aus oberer Leistungshaelfte:
- STA-Gruppe:Unterrichtet nach einem Lehrbuch mit frueher Einfuehrung prop.Gedanken
- TRAD-Gruppe:normaler Unterricht.

Ergebnisse:

1)Selbst in der oberen Haelfte der Klassen ist der Erwerb prop.Schemata langsam und graduell; nur bei 30% der 9th-grade Schueler kann man von "prop.Denken" sprechen.
Bei der STA-Gruppe tritt ein merklicher Fortschritt mit 14 Jahren ein,bei der TRAD-Gruppe 1 Jahr spaeter.
2)Die allgemeine Intelligenz korreliert hoch mit prop.Denken.
3)Instruktion hat positive Auswirkungen.
4)Insgesamt Bestaetigung der Untersuchungen von Lovell/Butterworth (1966).

398

TITELNUMMER: MP-2.0(27)

20 Kurtz,Barry Lloyd;
30 A /study of teaching for proportional reasoning/.
50 Berkeley:Univ./1976/.399 S.
56 pres.:engl.;
71 Dok 7636;

99 Design:Vergleichsuntersuchung zwischen 2 Schuelergruppen (je ca.200 Schueler,High School 14-15 Jahre alt):
-eine Gruppe mit speziellem Unterricht zum proportionalen Denken (N.R.-Programm),mit hohem explorativem und experimentellem Anteil.
Die Haelfte dieser Gruppe wurde viel mit konkretem Material unterrichtet,die andere Haelfte machte diese Uebungen nur mit Papier und Bleistift;
-eine Gruppe mit normalem Unterricht,ohne besondere Proportionalprogramme.
(Kontrollgruppe)

Ergebnisse:

1)kognitiv:
Die NR-Gruppe kann den Anteil der High performancer von 7% auf 57% steigen;diese Steigerung bezieht ihre Quelle vor allem aus den low performing pupils und middle performing pupils.
Die Kontrollgruppe behaelt ihre Struktur fast unveraendert bei.
Zwischen den beiden Haelften der NR-Gruppe gibt es kaum Unterschiede.
Algebraische und additive Strategien gehen bei der NR-Gruppe stark zurueck.

2)affektiv:

Die NR-Gruppenhaelfte mit konkretem Material hat den positivsten Eindruck vom Unterricht. Die NR-Gruppe hebt vor allem die Moeglichkeit hervor,mit dem geg.Material selbstaendig,unabhaengig vom Lehrer und im Kontakt untereinander zu arbeiten.

3)Schlussfolgerungen:

-man kann prop.Denken foerdern,nicht aber im Zusammenhang damit antiprop.Denken.

-Unterricht mit konkret-experimentellem und schueleraktivem Charakter ist im Alter von 14-15 Jahren effektiver als tradierter Unterricht.

-Algebr.Techniken sind eher Randphaenomene im Zusammenhang mit prop.Themen und fallen ab, sobald das Verstaendnis waechst.

Hinweis:die Arbeit enthaelt das ganze NR-Programm (NR=Numerical Relationships) mit allen Unterrichtsmaterialien.

TITELNUMMER: MP-2.0(28)

20 Reinisch,Anne-Marie;
30 /Proportion et equilibre de la balance/.Une experience d'apprentissage de la proportion inverse.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble: Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.126-132.
56 pres.:franz.;
71 MA-AA 00-45;

99 Design:Vergleichsuntersuchung zwischen zwei Gruppen mit etwa 70 Schuelern (11-12 Jahre).
Experimentalgruppe:Operative Spiele mit flaechengleichen Rechtecken
Normalgruppe:Ueblicher Unterricht in Proportionalitaet und Antiproportionalitaet.
Gemeinsamer Nachtest:
Finden einer "gleichgewichtserhaltenden Regel" an einer Balkenwaage.
Ergebnisse:
1)Die Experimentalgruppe findet mehrheitlich eine Regel ueber "gegenseitig inverse Operatoren".
2)Die Normalgruppe findet vor allem additive und produktorientierte Strategien.

TITELNUMMER: MP-2.0(29)

20 Fischbein,Efraim;Pampu,Ileana;Manzat,Ion;
30 /Comparison of ratios and the chance concept in children/.
51 /Child Development/,41/1970/6,S.377-389.
56 pres.:engl.;
71 MA-AM 00-2;

99 Design:Abschaetzen von Chancen beim Ziehen einer "winning color" in 2 durchsichtigen Urnen, die je verschiedene Anzahlen von schwarzen und weissen Kugeln enthalten.
60 Schueler (5-6 Jahre), 60 Schueler (9-10 Jahre), 60 Schueler(12-13);Jungen und Maedchen gleich.
Jede Gruppe wieder unterteilt in 3 20er-Gruppen.Dabei:
Gruppe I:muss Chancen ohne weitere Vorbereitung einfach abschaetzen
Gruppe II:erhaelt vor dem Abschaetzen Instruktion ueber Gruppierungstechnik
Gruppe III:erhaelt zuvor Instruktion ueber Verhaeltnisvergleich.
Insgesamt je 18 Versuche.

Ergebnisse:

1)Geschlecht nicht signifikant.

2)Alter und Instruktion hoch signifikant:
a)5-6jaehrige:
- nur etwa 40% der Antworten richtig,bei "gleicher Chance" nur 16%
- Instruktion bringt praktisch keine Verbesserung.

b)9-10jaehrige:
- ca.60% der Antworten richtig (Gruppe I), steigt bis 80% bei Gruppe II/III
- Instruktion sehr wirkungsvoll

c)12-4- bis 13-7jaehrige:

- ca.100% der Antworten richtig.

3)Problemloese-Strategien:

Typ 1:einfacher binaerer Vergleich ("ich waehle diese Urne,weil hier mehr schwarze sind als dort") .

Typ 2:Einbeziehen aller 4 Groessen ohne numerische Verhaeltnisse ("hier ist es leichter,weiss zu ziehen,weil hier mehr weisse sind als schwarze,verglichen mit der anderen Urne")

Typ 3:Beide numerischen Verhaeltnisse werden betrachtet und ihre numerische Beziehung explizit ausgenutzt ("in dieser Urne sind dreimal soviel und in der anderen zweimal soviel schwarze wie weisse")

5-6jaehrige:Typ 1 vorherrschend,kaum Veraenderung

9-10jaehrige:Typ 1 vorherrschend (spontan),aber durch Instruktion weithin Verschiebung nach Typ 2 und 3 moeglich;

12-13jaehrige:Typ 3 schon vorherrschend bei 60% der Schueler,durch Instruktion wird dieser Typ weithin vollends uebernommen.

4)Wahrscheinlichkeit ist mehr eine "Chance" als "probability".

TITELNUMMER: MP-2.0(30)

20 Falk,Ruma;
30 /Analysis of the concept of probability in young children/.
52 /Proceedings of the second international conference for the psychology of mathematics education/, Osnabrueck:Univ./1978/,S.144-147.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-35;

99 Design:Vergleich von 2 Urnen/2 Roulettes/2 Flaechen, die je aus verschiedenen Farbverhaeltnissen bestehen:
Schueler sollen abschaetzen,wo sie die groessere Chance haben,eine gegebene Farbe zu "ziehen".36 Kinder,5-11 Jahre, je 6 Schueler pro Jahr.

Ergebnis:
- alle Kinder koennen zum groessten Teil die Chance richtig abschaetzen.
  Die Faehigkeit nimmt von 78% (4 Jahre/bis 100% (11 Jahre) zu.
- Die Schueler lassen sich stark leiten vom "Uebergewicht" der zu ziehenden Farbe und von der "Gesamtzahl" der Kugeln in einer Urne.In beiden Faellen wird die groessere Chance dort vermutet.
- Falk fuehrt z.Zt.noch Untersuchungen zum "Uebergewicht" und zur "Differenzbildungs-" Strategie durch.

TITELNUMMER: MP-2.0(31)

20 Falk,Ruma;
30 The /perception of randomness/.
52 /Psychologie of Mathematics education/,Grenoble:
Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.222-331.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-45;

99 Design:mehreren Hundert Studenten und Schuelern
wurden (1) zufaellige Farbmuster vorgelegt;
ausserdem mussten die Versuchspersonen
(2) zufaellige Muster erzeugen.
Es wurde dann bei (1) die subjektive Einschaetzung des Grades an "randomness"(Zufaelligkeit) mit einem objektiven Mass P verglichen;bei (2) wurde ermittelt,wie zufaellig die erzeugten Muster gemaess P waren.
Ergebnisse:
Ad (1): P=60% wird subjektiv am staerksten als zufaellig wahrgenommen,kleinere und groessere Werte von P viel weniger.
Ad (2): Meist werden Muster mit P=60% erzeugt.
Folgerungen:
- Die subjektive Empfindung von randomness ist unzuverlaessig;es muss die Akzeptanz fuer ein objektives Mass herbeigefuehrt werden
- zufaellige Muster kann man nicht durch Menschen erzeugen lassen.

TITELNUMMER: MP-2.0(32)

20 Schupp,Hans;
30 /Zweiter Zwischenbericht ueber das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule/".
41 Paedagogische Hochschule Ruhr(Dortmund); Bundestagung fuer Didaktik der Mathematik (14,1980,Dortmund);
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover: Schroedel/1980/,S.307-310.
54 3-507-35016-5;
71 MA-AM 10-6;

99 Es handelt sich hierbei um die Beschreibung der Fortfuehrung des Stochastik-Curriculums(vgl. Schupp (1978),Titelnummer:MP-2.0(34)) fuer Klasse 8.

(1) Aufbau des Curriculums
    1) Durchschnittswert
    2) Erwartungswert
    3) Mittlere Abweichung

(2) Ergebnisse:

- 1) ist unproblematisch
- 2) nicht schwer,aber bei der Darlegung des Problems an wirtschaftlichen Beispielen waren die Schueler desinteressiert.Besser ist die Behandlung von Erfolgschancen bei Gluecksspielen.

- 3) nicht schwer,aber viele Rechenfehler.

-> Viele Eltern lehnen das Curriculum als "fuer IHK-Pruefungen unnuetz" ab.

(3) Folgerungen:

In Phase 2) Simulationen verstaerken:Spiel als Simulation des Ernstfalls (wirtschaftliche Probleme so "verpacken"?).

TITELNUMMER: MP-2.0(33)

30 Bibliographische Hinweise zu:
/Weitere Erfahrungsberichte und Unterrichtsversuche zum Bereich Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung/.
41 Landesinstitut Schleswig-Holstein fuer Praxis und Theorie der Schule(Kiel);
50 Kiel:IPTS/1977/.Getr.Zaehlg.
71 MA-AM 00-1;

99 Die im folgenden zusammengestellten Arbeiten koennen entliehen werden bei:

Landesinstitut Schleswig-Holstein fuer Praxis
und Theorie der Schule
Zentralstelle fuer Information und
Arbeitsplanung
Schreberweg 5
2300 Kronshagen

Verfasser	Titel der Arbeit
Ansel,Erich	Einfuehrung in die beschreibende Statistik in Klasse 8 unter methodisch-didaktischen Aspekten
Sattler,Alice	Statistik im Differenzierungsbereich der Klasse 9
Putschenbach, Manfred	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in Klasse 10 unter Einsatz eines Tischrechners
Hasselmann, Inge	Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem 6.Schuljahr
Sauer,Guenter	Das Erstellen von Arbeitsblaettern und Tests zu einem Kurs in Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Erprobung in einer 7.Klasse

Krautstrunk, Christine	Einsatz von Aufzeichnungen des Schulfernsehens bei einer Einfuehrung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ein Unterrichtsversuch in Klasse 7
Honisch,Peter	Einfuehrung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung in einer Klasse 7 unter besonderer Beruecksichtigung von Zufallsexperimenten als Ereignismengen und als Ereignisbaeume
Hoelemann, Thomas	Einfuehrende Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Anwendung der Bruchrechnung
Gauder,Herbert	Propaedeutische Einfuehrung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Kl.8)
Hirsch,Reinhard	Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. - Eine Einfuehrung der Grundbegriffe in Klasse 9.
Dittrich,Elke	Einfuehrung in die Wahrscheinlichkeitsrechnug unter Beruecksichtigung der Statistik
Rothe,Carla	Mathematisierung von Spielen - eine Einfuehrung der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem Differenzierungskurs der Jahrgangsstufe 9 eines math-naturwiss.Gymnasiums.

TITELNUMMER: MP-2.0(34)

20 Schupp,Hans;
30 /Zwischenbericht ueber das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule/".
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover: Schroedel/1978/,S.246-248.
71 MA-AA 10-7;

99 In Zusammenarbeit von Schule und Hochschule soll ein basisorientiertes,offenes Curriculum entwickelt,erprobt und evaluiert werden,das Hauptschueler dazu befaehigen soll,sich in stochastischen Situationen sachgerecht zu verhalten und zweckmaessig entscheiden zu koennen.
Mit dem Teilcurriculum "Stochastik in Klasse 7" werden folgende Intentionen verbunden:
- Einsicht in Aktualitaet und Allgegenwart stochastischer Situationen
- Aufgabe irrationaler Verhaltensmuster in solchen Situationen
- sicherer Umgang mit Basisbegriffen der Stochastik
- kritiche Stellungnahme zu deren Gebrauch durch Andere
- Faehigkeit zu Anwendung dieser Begriffe.

Die erste Erprobung lieferte folgende Erkenntnisse (auszugsweise zitiert):
1. Affektive Ziele
"Die Schueler reagierten positiv auf das Curriculum.Auch schwaechere Schueler arbeiteten erfreulich gut mit.Die Hausaufgaben wurden ueberdurchschnittlich sorgfaeltig erledigt und zusaetzliche Experimente spontan uebernommen."
2. Kognitive Ziele
"Nach Endtest und Lehrerberichten duerfen die Ziele der ersten drei Phasen als erreicht gelten.Zusammen mit 1. bedeutet dieses: Die intendierte 'stochastische Sensibilisierung' hat stattgefunden.

Erhebliche Schwierigkeiten traten allerdings bei den mehrstufigen Experimenten auf,hervorgerufen durch Ermuedungserscheinungen am Ende des Lehrgangs und durch fehlende Voraussetzungen (Baumdiagramm).
Die vorgesehene Unterrichtszeit wurde erheblich ueberschritten; das liegt an der Unterschaetzung der Schwierigkeiten beim Mathematisieren,am Fehlen von Leitbegriffen(Opperator,Verhaeltnis) und Techniken(Diagramme),an der Unermuedlichkeit der Schueler im Aufgreifen von Situationen und der bei Erstbehandlungen ueblichen Unsicherheit der Lehrer."

3. Umstrukturierungen

"Der naive Zufallsbegriff der Schueler('Willkuer') muss noch bewusster abgebaut werden zugunsten einer Auffassung als subjektives Negat der 'Sicherheit'. Dies kommt insbesondere dem Uebergang von Zufalls- zu Massenerscheinungen zugute.
Simulationen sind nicht nur als technische Hilfen, sondern auch als heuristische Mittel einzusetzen.
Die vierte Phase muss teilweise abgeaendert werden: die mehrstufigen Experimente sind eventuell als fakulatives oder differenzierendes Angebot zu gestalten."

4. Rezension des Curriculums durch die erprobenden Lehrer

"Nach anfaenglicher Zurueckhaltung werden Form und Inhalt des Curriculums jetzt angenommen.Dazu hat insbesondere die intensive Zusammenarbeit mit dem Planungsstab beigetragen; den Lehrern ist nun bewusst,dass eine innovative Curriculumentwicklung ohne ihre Planungen und Erfahrungen nicht moeglich ist."

Diesem Kapitel sind auch folgende Beiträge aus anderen Kapiteln zuzuordnen:

MP-6.0(16)

2.3 Dokumente zum Thema:
Schlußrechnen mit Anwendungen

(Zugeordnete Abschnitte im Heft "Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: "Proportion" sind vor allem: 6.1, 6.2, 7.2, 7.6, 9.2, 9.6)

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetzer, Herausgeber
41 Korporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-3.0(01)

30 Acquisition des "Structures Multiplicatives" dans le premier cycle du second degre/.
40 Vergnaud,Gerard(Mitarb.);Rouchier,Andre(Mitarb.); Recco,Graciela(Mitarb.);
41 Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques Universite d'Orleans;
50 Orleans:Universite/1979/.126 S.
53 /Collection recherchs.2/
56 pres.:franz.;
71 MA-AA 00-62;

99 Design:- Schriftliches Loesen von prop.Textaufgaben durch 11-15jaehrige Schueler (pro Jahrgang etwa 20-30 Schueler) der Klassenstufen 6e,5e,4e,3e (Frankreich)
- 4 Typen von Textaufgaben: S1,S2,S3,S4 (s.Tabelle).
- Auswertung durch Protokoll-Analyse.

Vorbemerkung:
1) die Abhandlung ist auch in (englischer) gekuerzter Fassung erschienen (siehe Titelnummer MP-3.0(02)).
2) Im IREM-Papier berichtet Vergnand noch ueber einen Versuch zu komplexeren Aufgaben unter Einbezug von Volumenberechnungen.Hiebei faellt die grosse Schwierigkeit der Volumenaufgaben auf.Volumen wird oft mit Umfang oder Oberflaeche verwechselt.Diese Schwierigkeiten koennen in prop.Textaufgaben das ohnehin bestehende Berechnungsproblem verschaerfen.

Tabelle
In der folgenden Tabelle sind die mittleren Schwierigkeitsgrade fuer S1 - S4 nach Altersstufen und Strategietypen angegeben,die Vergnaud

ermittelt hat.

(S1) n1 / λn1 | n2		(S2) n1 / n2 | λn1	
(S3) λn1 / n1 | n2		(S4) λn1 / n2 | n1	

		(S1)				(S2)			
Ly-beck	Strategie-typen	6	5	4	3	6	5	4	3
	S	23%	36%	45%	58%	16%	18%	29%	58%
B	V	0%	13%	12,5%	12%	3%	22%	20%	15%
	S'	10%	9%	8,3%	6%	10%	9%	4%	3%
SUMME		33%	58%	66%	76%	29%	49%	53%	76%
A	F	10%	13%	12,5%	9%	16%	13%	25%	6%
	F'	0%	0%	0%	0%	3%	0%	0%	0%
SUMME		10%	13%	13%	9%	19%	13%	25%	6%
	S'F'	13%	9%	16%	3%	6%	9%	16%	6%

		(S3)				(S4)			
Ly-beck	Strategie-typen	6	5	4	3	6	5	4	3
	S	23%	31%	42%	53%	10%	18%	8%	26%
B	V	0%	23%	13%	9%	0%	5%	4%	12%

	S'	26%	23%	13%	18%	10%	9%	0%	3%
SUMME		49%	77%	68%	80%	20%	32%	12%	41%
A	F	0%	5%	21%	6%	3%	9%	21%	3%
	F'	10%	0%	4%	3%	13%	23%	4%	3%
SUMME		10%	5%	25%	9%	16%	32%	25%	6%
	S'F'	0%	0%	0%	0%	6%	5%	13%	0%

Erlaeuterung der Abkuerzungen:
S :Skalar (richtig)
S' :Skalar (falsch)
V :Skalar (ueber die Einheit)
F :funktional (richtig)
F' :funktional (falsch)
S'F':falsche Misch-Strategie

Erlaeuterung zur Spalte "Lybeck":
Die Buchstaben (A) und (B) kennzeichnen die auch von Leif Lybeck (s.dort) entdeckten Strategiebereiche und ordnen sie der Tabelle von Vergnaud zu.

Ergebnisse der Querschnittuntersuchung von 11-15jaehrigen zu den Typen S1,S2,S3,S4 der Proportionalaufgaben:

(1) Es gibt 2 Hauptstrategien:

S:"Skalar" (="isomorphe Struktur")

(->)

Diese kann 1-schrittig sein oder

2-schrittig (ueber die Einheit)

F:"funktional"

(2) Die Erfolgsquote nimmt mit dem Alter stark zu:
von 40% -> 80% (bei S1 u.S2)
von 30% -> 75% (bei S3)
von 16% -> 56% (bei S4)
aber S4 bleibt schwer.

(3)Die Strategie S ueberwiegt stark;innerhalb von S ueberwiegt die 1-schrittige Strategie.

Beispiel S1:	6e	5e	4e	3e
S	20%	50%	50%	60%
F	10%	15%	10%	10%

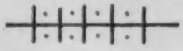
(4) Wenn der "horizontale" Variablenzusammenhang numerisch "stark" ist,dann nimmt auch die funktionale Strategie (S4)zu.
(5) Bei S3 und S4 ("von der Vielheit zur Einheit") nimmt die Fehlerhaeufigkeit stark zu.
(6) Andere Verfahren als S-F-Kategorien kommen kaum vor,z.B.auch kaum "Ansatzbruchverfahren fuer Dreisaetze".
(7) 14jaehrige ueberschauen mehr Dimensionen als 12jaehrige.

Didaktische Vorschlaege
(1) Es sollen Textaufgaben ohne Fragen gestellt werden,aber mit vielen verschiedenartigen Daten.Lehrziele:
a) Ordnen u.Erfassen der Informationen darin,insbes.mehrere Dimensionen

b) Fragen aufwerfen

(2) Strategie-"Bewusstmachungs"-Aufgaben;z.B. Zeit-Weg-Tabellen ausfuellen und moegliche Ausfuellstrategien klaeren

(3) Paar-"Generierungs"-Aufgaben,um die Idee der rationalen Zahl zu festigen;z.B.unvollstaendige Tabellen der Form ergaenzen lassen



und/oder "nicht passende" Paare darin endecken lassen.

TITELNUMMER: MP-3.0(02)

20 Vergnaud,G.;
30 /Didactics and acquisition of'multiplicative structures' in secondary schools/.Proceedings of an International Seminar,The University of Leeds.
41 Centre for Studies in Science Education,School for Education(Leeds),Univ.(Leeds);
52 /Cognitive Development Research in Science and Mathematics/,Leeds:Univ./1979/,S.190-201.
54 0904421-07-4;
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-63;

99 Englische (Kurz-)Fassung des franzoesischen Originalartikels:
Acquisition des "Structures Multiplicatives", IREM Orleans,collections "recherches",RO No 2, Mars 1979 (Titelnummer:MP-3.0(01).

TITELNUMMER: MP-3.0(03)

20 Suarez,Antonio;Rhonheimer,Martin;
30 /Lineare Funktion/.Formales Denken und Experiment im Mathematikunterricht der Volksschule.Praktische Anregungen zur Proportionenlehre (Dreisatz) aus entwicklungspsychologischer Sicht.
50 Zuerich:Limmat-Stiftung/1974/.20 S.
71 MA-AY 51-1;

99 Dieser Beitrag zur Proportionsforschung betont von der Versuchsanlage her den Charakter des "schliessenden" Rechnens.
Er ist ein Teilaspekt der umfassenden Untersuchung von Suarez zum Funktionsbegriff (s.dort) und steht gleichzeitig u.a.in Beziehung zu den Arbeiten von Karplus (Titelnummer:MP-2.0(08)).

Design:800 Schuelern schweizer Sekundarschulen und Gymnasien im Alter von 10-16 Jahren werden 2 Probleme gestellt:

1) Herr Klein,Herr Gross,Herr Riese

	Ringe	Klammern
Herr Klein	4	6
Herr Gross	6	?
Herr Riese	11	?

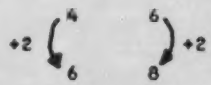
Herr Klein's Groesse ist in Ringen und Klammern gemessen bekannt.
Weitere Werte sind zu finden.
(Der Versuch von R.Karplus bezieht sich nur auf Herrn Klein und Herrn Gross).

2) Messzylinder-Versuch

(vgl.Beschreibung bei L.Lybeck,
Titelnummer:MP-3.0(08))
Die Schueler sollen nicht nur das Rechenergebnis angeben,sondern auch alle Rechnungen und Ueberlegungen aufschreiben, die sie bis zum Ergebnis hin angestellt haben.

Ergebnisse der Untersuchung:

1) Alle Schueler vermuten eine Gesetzmaessigkeit und gehen "logisch" vor,indem sie ihnen bekannte systematische Denkweisen verwenden.
2) Es treten vor allem 2 Strategietypen auf:
   a) "Prinzip der Erhaltung der Differenzen"



(Additionsstrategie)

   b) "Proportionalstrategien" in verschiedenen Gestalten (Vervielfachen,Verhaeltnisse etc.)
3) Altersverteilung (ueber die Schularten gemittelt):

	10 J	12 J	14 J	16 J
Add.strategie	76%	40%	4%	-
Prop.strategie	4%	44%	96%	100%

Die Proportionalitaetsstrategien sind im Gymnasium am staerksten verbreitet.Die Daten der Untersuchungen von Karplus u.a.(USA) liegen z.T.deutlich niedriger,stimmen aber im Trend ueberein (siehe Titelnummer:MP-2.0(01) bis MP-2.0(9)).
4) Uebergaenge von der Additionsstrategie zur Proportionsstrategie:
noch ziemlich ungeklaert.Auch wenn die Additionsstrategie als "unrealistisch" erkannt wird, bleiben juengere Schueler ihr im Prinzip noch

verhaftet und versuchen lediglich eine Abaenderung, z.B. "mit groesser werdenden Messwerten werden auch die Differenzen groesser".
Manchmal werden auch "Beziehungen" numerischer Art zwischen den Daten gesucht und diese "angewendet".
Vor dem Erwerb proportionaler Strategien wird oft eine allgemeine Unsicherheit beobachtet.

5) Didaktischer Vorschlag:
der Erwerb prop.Strategien kann vielleicht durch lineare Diagramme gefoerdert werden, bei denen Zuwachsueberlegungen (Delta x,Delta y) angestellt werden,die zu einer Vorstellung von Verhaeltnis (Steigung)fuehren.

TITELNUMMER: MP-3.0(04)

20 Lybeck,Leif;
30 A /research approach into Science Education at Goeteborg/.Paper presented at the Joint ICMI-ICPE-CTS-UNESCO-IDM-conference on "Cooperation between Science Teachers and Mathematics Teachers",Sept. 17-23,1978,Institut fuer Didaktik der Mathematik, Bielefeld.
41 Institute of Education (Goeteborg);University (Goeteborg);Joint ICMI-ICPE-CTS-UNESCO-IDM-conference on "Cooperation between Science Teachers and Mathematics Teachers" (Sept.1978, Bielefeld);
50 Goeteborg:Institute of Education/1978/.III,19 S.
53 /Concept Formation in Mathematics and the Natural Science,The Integrated Upper Secondary School. 4/;/Institute of Education (Goeteborg).Report.71/
56 pres.:engl.:
71 MA-AA 00-44;

99 Ausfuehrliche Darstellung der Ziele und Arbeitsmethoden des schwedischen BMN-Projekts,das sich mit Begriffsbildungen von Schuelern in Mathematik und Naturwissenschaften befasst.
Das Projekt verfolgt vor allem auch Zusammenhaenge zwischen Mathematik und Naturwissenschaften.

TITELNUMMER: MP-3.0(05)

30 /Ratio and proportion/.
40 Hart,Kathleen(Hrsg.);
41 CSM S Mathematics Team;
52 /Childrens Understanding of Mathematics:11-16/,
London:Murray/1981/,S.88-101.
54 0-7195-3772-X;
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-8;

99 Design:Loesen von Textproblemen,die Verhaeltnisse enthalten (z.B.Rezepte auf andere Grundmengen umrechnen,Mr.Short-Mr.Tall-Aufgabe,Vergroesserungsaufgaben usw.)
ca.10 000 Schueler von 13-15 Jahren(GB).
Ergebnisse:
1) Es werden 5 Stufen des Umgehens mit Verhaeltnissen im Rahmen der gestellten Textprobleme gefunden:
Stufe 0: Keine Loesungsansaetze
Stufe 1: Aufgaben,die keine Verhaeltnisrate benoetigen oder durch einfaches Verdoppeln bzw.Vervielfachen mit 2,3 loesbar sind
Stufe 2: Aufgaben mit einfachen Verhaeltnissen, z.B. 2:1
Stufe 3: nicht aufgehende Verhaeltnisse,Brueche
Stufe 4: Aufgaben,die ohne Verhaeltnisbildung nicht loesbar sind.
2) Globale Verteilung des Schwierigkeitsgrads der einzelnen Aufgaben in:
Stufe 1: 79% - 95%
Stufe 2: 39% - 51%
Stufe 3: 27% - 33%
Stufe 4: 12,5%-21%
3) Prozentsaetze der Schueler in den einzelnen Stufen:

Stufe	0	1	2	3	4
13-jaehrige	7%	53%	26%	9%	5%
14-jaehrige	7%	49%	23%	12%	9%
15-jaehrige	3%	41%	27%	14%	15%

Es finden global gesehen nur sehr langsame Altersverschiebungen statt.

4) Strategien der Schueler
   - fundamentale Strategien sind Verdoppeln und Halbieren;
   - eine grosse Rolle spielen die Additions-Strategien,sobald Probleme ueber Stufe 1 bzw.2 hinausgehen (vgl.auch die Untersuchungen von Karplus u.a.).
   - weiter ist zu beachten,dass viele Schueler "Bruchvermeidungs-Strategien" verfolgen;daher sind 2:1 - Aufgaben und 5:3 - Aufgaben grundsaetzlich verschieden.

TITELNUMMER: MP-3.0(06)

20 Lybeck,Leif;
30 /Begreppet FOU i ett aemnesmetodiskt perspektiv/. Vetenskapsteoretiska synpunkter pa pedagogiskt forsknings - och utvecklingsarbete utgaende fran ett aemnespedagogiskt synsaett.
50 Goeteborg:Universitet/1978/.25 S.
56 pres.:schwed.;
70 Der Begriff "Forschungs- und Entwicklungsarbeit (FOU)" aus einer fachmethodischen Perspektive.
71 MA-AA 00-76;

99 Darstellung wissenschaftstheoret.Aspekte des Ansatzes des BMN-Projekts (s.andere Arbeiten von Lybeck,besonders Titelnummer:MP-3.0(04)).

TITELNUMMER: MP-3.0(07)

20 Lybeck,L.;Marton,F.;Saljoe,R.;
30 /Begreppsbildning inom matematik och naturvetenskapliga aemnen:ett forskningsprojekt om gymnasieelevers foerstaelse av vissa fysikaliska aspekter av omvaerlden/.
50 Goeteborg:Universitet/1976/.57 S.
56 pres.:schwed.;
70 Begriffsbildung innerhalb der Mathematik und Naturwissenschaften:ein Forschungsprojekt zum Verstaendnis bei Gymnasialschuelern ueber einige physikalische Aspekte der Umwelt.
71 Math 1034;

99 Beschreibung des Lernverhaltens von Gymnasial-Schuelern beim archimedischen Prinzip sowie bei proportionalen Problemen der Physik (Druck,Dichte, Federdehnung etc.).
Vorarbeiten zu den spaeteren Arbeiten von Lybeck.

TITELNUMMER: MP-3.0(08)

20 Lybeck,Leif;
30 /Studies of Mathematics in Teaching of Science in Goeteborg/.Paper presented at the Joint ICMI-ICPE-CTS-UNESCO-IDM-conference on "Cooperation between Science Teachers and Mathematics Teachers",Sept. 17-23,1978,Institut fuer Didaktik der Mathematik, Bielefeld.
41 Institute of Education (Goeteborg)(Hrsg.);University (Goeteborg)(Hrsg.);Joint ICMI-ICPE-CTS-UNESCO-IDM-conference on "Cooperation between Science Teachers and Mathematics Teachers" (Sept. 1978,Bielefeld)(Hrsg.);
50 Goeteborg:Institute of Education/1978/.I,37 S.
53 /Concept Formation in Mathematics and the Natural Science,the Integrated Upper Secondary School.5/; /Institute of Education (Goeteborg).Report.72/
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-46;

99 Auszug aus dem (schwedischen) BMN-Projekt.
Design:1) Grund fuer das BMN-Projekt,Proportionalitaet zu untersuchen,ist deren Bedeutung als integrierender Faktor in Mathematik und Naturwissenschaften
2) Ziel:
Welche Denkformen wenden Schueler an?
Wie formieren sich math.Konzepte?
3) Versuchsgruppe:
Schueler K1.10 (16-17 Jahre);dabei 12 Schueler aus N-Line (Naturwiss.Zug), 14 Schueler aus T-Line (Technik-Zug).
4) Aufgaben:
a) "Messzylinder":
2 Messzylinder unterschiedlichen Querschnitts sind mit dem gleichen Volumen an Wasser gefuellt.Die Hoehen

der Wasserstaende sind 6 bzw.9.
Nun wird aus dem dickeren Messzylinder
Wasser bis zur Hoehe 4 entnommen.
Wie hoch steht das Wasser im duenneren
Zylinder,wenn dort dasselbe Volumen
an Wasser entnommen wird?

b) "Federdehnung":
fuer einen Dehnungsversuch ist ein
Wertepaar bekannt.Fuer weitere Dehnungs-
versuche sollen (in eine vertikale
Wertetafel) Paare eingepasst werden.

Beide Aufgaben fuehren auf das Problem

a b
c x

5) Durchfuehrung und Auswertung:
Interviews,schriftliches Rechnen.
Auswertung der Interviews und Rechenproto-
kolle.

Ergebnisse:

Die Untersuchung differenziert die Arbeiten von Karplus und Suarez (s.dort).

1) Es gibt 2 Kategorien,mit denen die Schueler an die Aufgaben herangehen:

- die "funktionale" Kategorie:
  Strukturieren von Zusammenhaengen zwischen den Variablen

  a b
  c x

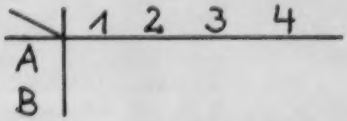
  in 2 Formen:

A oder B

- die "quantitative" Kategorie:
  Numerisieren der funktionalen Zusammenhaenge in 4 Formen:

1 Bilden von Proportionen
2 Betrachten prop.Differenzen
3 Qualitatives Betrachten von Differenzen in Form von "proportionalem Abschaetzen"
4 Nicht-prop. Differenz-Strategie (Konstante Differenzen)

2) Die beiden Kategorien sind unabhaengig voneinander und bilden demnach ein 2-dimensionales Schema:



3) Die verwendeten kategorialen Strategien haengen stark vom Inhalt der Aufgaben,ihrer Darstellung und von allgemeinen Denkstrukturen ab.
Die Schueler wechseln unvorhersehbar:
- beim "Dreisatz" (Messzylinder) ueberwiegt A1,A2, (A3 auch stark)
- bei der "Wertetafel" (Feder) ist B bei Verdopplungen stark,sonst eher A.
Bei A-Schuelern kommt hier fast nur die quantitative Kategorie 1 vor,bei B-Schuelern streuen die quantitativen Strategien von 1-3
- die Strategien 3 und 4 kommen insgesamt relativ selten vor.

Schlussfolgerungen:

1) Mit den eingefuehrten Kategorien A u.B lassen sich did. Analysen durchfuehren.
z.B.:- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$
ist von Typ A,
ebenso alle "gemischten" Formelumstellungen verschiedener Dimensionen
- "halbe Masse entspricht halbem Volumen"

ist eine B-Kategorie.
Lehrbuecher von Algebra fuehren die A-B-"Jumps" bedenkenlos durch.

2) Der Schueler muss die A1-Strategie erlernen, da sie die eigentlich "fruchtbare" Strategie ist.
Hierzu muss das Feld der Strategien im Unterricht bedacht werden.

TITELNUMMER: MP-3.0(09)

20 Lybeck,Leif;
30 /Proportionstaenkande och taenkande i proportioner/.
Bidrag till Nordisk Foerening foer Pedagogisk
Forsknings (NFPF) kongress vid Institut for
Uddannelse og Socialisering,Aalborg Universitets-
center,Aalborg,Danmark,19-22 oktober 1978.
Sessionen 'Inlaerning och omvaerldsuppfattning 1:
Uppfattning av aemnesinnehall'.
50 Goeteborg:Universitet/1978/.49 S.
56 pres.:schwed.;
70 Proportionsdenken und Denken in Proportionen.
Ein Beitrag zum Kongress des nordischen Vereins
fuer paedagogische Forschung am Institut fuer
Erziehung und Sozialisation,Aalborg,Universitaets-
zentrum.
71 MA-AA 00-77;

99 Schwedische (Original-)Fassung von L.Lybeck,
Studies of Mathematics in Teaching of Science in
Goeteborg,1978 (Titelnummer:MP-3.0(08)).

TITELNUMMER: MP-3.0(10)

20 Lybeck,Leif;
30 /Some real pictures from the classroom-based research in Physics teaching at Goeteborg/. Paper prepared for the "Cognitive Development Research Seminar,Science and Mathematics Education. Session 15:Classroom-based research".The University of Leeds,17-22 Sept.1979.
41 Institute of Education(Goeteborg)(Hrsg.); University(Goeteborg)(Hrsg.);
50 Goeteborg:Institute of Education/1979/.23 S.
53 /Concept Formation in Mathematics and the Natural Science,the Integrated Upper Secondary School.10/; /Institute of Education (Goeteborg).Report.88/
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-75;

99 (1) Inhalt weithin identisch mit:
Leif Lybeck Studies of Math.in Teaching of Science in Goeteborg
No.72 October 1978 (Titelnummer:MP-3.0(08)).
(2) Zusaetzlicher Hinweis darauf,dass die dort beschriebene 2-dimensionale Matrix nicht zur Klassifikation von Studenten,sondern zur Diagnose der vorkommenden Denkformen fuehrt. Der Lehrer soll dieses Feld sehen und von da aus handeln.

TITELNUMMER: MP-3.0(11)

20 Johansson,Bengst;Lybeck,Leif;
30 /Proportions-och proportionalitetstaenkande hos gymnasieelever,ak 1,N-och T-linjerna/.
50 Goeteborg:Universitet/1978/.164 S.
56 pres.:schwed.;
70 Denken in Proportionen und Proportionalitaeten bei Gymnasialschuelern,1.Jahrgang (10.Klasse), Naturwissenschaftliche und Technische Linie.
71 Math 1036;

99 Ausfuehrliche schwedische Fassung von L.Lybeck, Studies of Mathematics in Teaching of Science in Goeteborg,1978.
Der Forschungsbericht enthaelt vor allem eine ausfuehrliche Darstellung der dort erwaehnten Schuelerprotokolle,ausserdem detailliertere Angaben zu den von Lybeck entdeckten Lernkategorien im Bereich proportionalen Denkens.

TITELNUMMER: MP-3.0(12)

20 Lybeck,Leif;
30 /Some theoretical considerations and experiences related to Research and Development in the Teaching of Mathematics and Science/.
Paper presented at the "Cognitive Development Research Seminar,Science and Mathematics Education. Session 20:Research and Development (The research-practitioner interface)".The University of Leeds, 17-22 Sept.1979.
41 Institute of Education(Goeteborg); University(Goeteborg);
50 Goeteborg:Institute of Education/1979/.18 S.
53 /Concept Formation in Mathematics and the Natural Science,the Integrated Upper Secondary School.9/; /Institute of Education(Goeteborg).Report.87/
56 pres.:engl.;
70 Ein fachmethodischer Forschungsabsatz fuer die Faecher Naturwissenschaften und Mathematik.
71 MA-AA 00-64;

99 Fortschreibung des Forschungsberichts L.Lybeck, A research approach into Science Education at Goeteborg,1978,aus der Sicht inzwischen gemachter Erfahrungen.
Es wird umfassend dargelegt,dass sich aus Sach-analysen des wissenschaftlichen Hintergrunds kaum relevante Hinweise fuer das Lernverhalten ergeben.Aus dieser Erfahrung heraus wird ein Forschungsdesign entwickelt,das Rolle und Stellen-wert empirischer Forschung in Beziehung zur Wissenschaft einerseits und zum Lernprozess andererseits definiert.

TITELNUMMER: MP-3.0(13)

20 Lybeck,Leif;
30 En /aemnesmethodisk forskninqsansats foer naturvetenskaplige aemnen och matematik/.
50 Goeteborg:Universitet/1978/.63 S.
56 pres.:schwed.;
70 Ein fachmethodischer Forschungsansatz fuer die Faecher Naturwissenschaften und Mathematik.
71 Math 1035;

99 Die Arbeit untersucht die Beziehungen zwischen physik.und math.Konzepten beim physikalischen Unterricht.
Sie benutzt dazu die empirischen Forschungsergebnisse (vgl.die anderen Arbeiten von Lybeck) des BMN-Projekts und stellt sie Lehrplananalysen gegenueber.
Lybeck plaediert fuer eine starke Integration physikalischer und mathematischer Konzepte im Unterricht.

TITELNUMMER: MP-3.0(14)

20 Lybeck,Leif;
30 /Arkimedes i klassen/.En aemnespedagogik beraettelse.
50 Goeteborg:Acta Universitatis Gothobergensis/1981/. 286 S.
53 /Goeteborg studies in educational sciences.37/
54 91-7346-097-4;
56 pres.:schwed.;
70 Archimedes in der Klasse.Ein fachpaedagogischer Bericht.
71 MA-AA 00-65;

99 Die Abhandlung ist eine umfassende Zusammenschau der Arbeiten zur Unterrichtsforschung von Lybeck (bis 1981).
Sie umfasst alle methodischen und inhaltlichen Aspekte,die in den uebrigen Einzelveroeffentlichungen enthalten sind.
Als Beispiele dienen das Lernverhalten von Schuelern beim archimedischen Prinzip sowie bei proportionalen Problemen,funktionalen Fragestellungen und bei der Verwendung von Variablen.
Lybeck zeigt,dass sich aus Sachanalysen keine fuer das Lernverhalten relevanten Daten erschliessen lassen.Daher ist fuer die Didaktik die empirische Erforschung von Lernverhalten unverzichtbar.

TITELNUMMER: MP-3.0(15)

20 Fischer,Egon;Hylla,Erich;Suellwold,Fritz;
30 /Rechentest RT 8+/.Schulleistungstest fuer 8.und hoehere Klassen.
41 Deutsches Institut fuer internationale paedagogische Forschung(Frankfurt,Main);
50 Weinheim:Beltz/1965/.Getr.Zaehlung;
71 MA-AL 51-1;

99 Design:-Standardisierter Mathematiktest fuer Hauptschulen ab 8.Klasse mit 6 Subtests:
natuerliche Zahlen, (10 Fragen)
Groessen, (9 Fragen)
Brueche, (9 Fragen)
Dezimalzahlen, (9 Fragen)
Schlussrechnen, (5 Fragen)
Prozentrechnen, (9 Fragen)
-validiert an ca.4 000 Schuelern,8.Volksschuljahr,BRD

Ergebnisse der Standardisierung:

(1) Schwierigkeitshierarchie:

		Standardabweichung
nat.Zahlen	57%	2,9
Groessen	61%	2,1
Brueche	57%	2,3
Dez.Zahlen	62%	2,2
Schlussrechnen	74%	1,3(auf 5 Fragen|)
Prozentrechnen	46%	2,3

(2) Korrelationen:
- Dez.zahlen - Subtest korreliert gut mit nat.Zahlen,Groessen,Bruechen - nicht aber mit Schlussrechnen u.Prozentrechnen
- Schlussrechnen korreliert mit allen anderen Bereichen nicht signifikant
- Prozentrechnen korreliert signifikant mit Groessen und Bruechen.

TITELNUMMER: MP-3.0(16)

20 Herron,Dudley J.;Wheatley,Grayson H.;
30 A/Unit Factor Method for solving Proportion problems/.
51 /Mathematics Teacher/,71/1978/1,S.18-21.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-66;

99 Design:Es handelt sich um einen Erfahrungsbericht aus der Schulpraxis und stellt einen Vergleich zwischen der Verwendung von Proportionen im Mathematikunterricht und in dem naturwissenschaftlichen Faechern ausgehend von dem Piaget-Modell dar.

Ergebnisse/Vorschlaege:
(1) Bei Dreisatz-Aufgaben die Einheitsgroessen (mit Dimensionen) verwenden.
(2) Deutung der Einheitsgroessen konkret,z.B.

"$\rho = 27 \frac{g}{cm^3}$ heisst: 1cm (exp(3)) wiegt 27g"

ist viel leichter als zu sagen
"ρ ist das Verhaeltnis von Masse zu Volumen".
Das letztere verstehen die meisten Schueler nicht.

TITELNUMMER: MP-3.0(17)

20 Kirsch,Arnold;
30 /Eine Analyse der sogenannten Schlussrechnung/.
51 /Mathematisch-physikalische Semesterberichte/,/
1969/1,S.41-55.
71 MA-AL 00-4;

99 Fachwissenschaftliche Analyse der im Dreisatz- und Verhaeltnisrechnen der Schule enthaltenen mathematischen Aspekte,insbesondere Abgrenzung gegen fachwissenschaftlich falsche Interpretationen (z.B.dass das uebliche Schlussrechnen "logisches" Schliessen meine).
Keine expliziten Bezuege zur empirischen Forschung.

TITELNUMMER: MP-3.0(18)

20 Meissner,Hartwig;
30 /Prozentrechnung "mangelhaft"/?
52 /Beitraege zum Mathematiunterricht/,Hannover:
Schroedel/1981/,S.68.
71 MA-AL 10-13;

99 Design:Schwierigkeitsgrad- und Strategiemessung
an Grundaufgaben der %-Rechnung:
500 Schueler.

Ergebnisse:

(1) Nur Prozentwertberechnung relativ leicht (73%),
alle anderen Grundaufgaben schwer (ca.20%).

(2) Strategien:
- am haeufigsten und am sichersten ist die
klassische Dreisatzmethode;
- funktionale Methoden sind ganz selten (etwa
3% aller Loesungen);aber die Schueler,die
sie benutzen,sind sehr erfolgreich;
- Operatormethoden und formale Methoden nehmen
den 2. und 3.Rang ein.

(3) Fehler:
Variablenvertauschung liegt - strategieunab-
haengig - bei 20% (funktionale Strategie nicht
beruecksichtigt).

TITELNUMMER: MP 3.0(19)

20 Wunsch,Christian;
30 /Prozentrechnen und Diagramme/.
51 /Ehrenwirth Hauptschulmagazin/,/1978/12,
S.39-42.
71 MA-AL 00-3;

99 Es handelt sich hierbei um einen unterrichts-
methodischen Beitrag.Der Autor plaediert fuer die
Darstellung der prozentualen Verteilungen an
Diagrammen,da alleiniges "Umrechnen auf 100"
hypothetisch ist.
Der Beitrag enthaelt sehr schoene und methodisch
vielfaeltige Beispiele.Fuenf Unterrichtsstunden
sind vorgesehen,die detailliert beschrieben sind.

TITELNUMMER: MP-3.0(20)

20 Meierhoefer,Bernd;
30 /Textaufgaben aus der Prozentrechnung/.Entwicklung und Anwendung eines Loesungsschemas.
51 /Ehrenwirth Hauptschulmagazin/,/1977/12,S.41-44.
71 MA-AL 00-2;

99 Ein weiterer unterrichtsmethodischer Beitrag zur Prozentrechnung.
Vorschlaege: in Schritten an %-Text-Aufgaben herangehen:
(1) Textanalyse
(2) Dreisatz-Ansatz mit Grundregel: 100% = GW
(3) Grafische Veranschaulichung ueber die Verteilung (z.B.Streifendiagramme),auch als Reflexion ueber die geloeste Aufgabe verwendbar.
Der Unterrichtsgang ist in vier Zeitstunden aufgeteilt.Die grafische Veranschaulichung hat hier die Aufgabe,das in der Aufgabe steckende Problem herauszuloesen:die Loesung selbst wird dann ueblicher Methode gesucht.

TITELNUMMER: MP-3.0(21)

20 Gromann,Sigrun;
30 /Vorschlag fuer die Gestaltung des Stoffabschnitts "1.2 Prozentrechnung" in Klasse 7/.
51 /Mathematik in der Schule/,18/1980/7-8,S.384-389.
71 MA-AL 31-10;

99 Design:Textaufgaben der %-Rechnung(Grundtypen) an ca.400 Schuelern Kl.7 (Berlin). Die Schueler hatten %-Rechnung von der Grundgleichung $\frac{P}{P} = \frac{G}{100}$ ausgehend.

Ergebnisse:

(1) Nur wenige Schueler arbeiten fehlerfrei.
(2) Hauptfehler:falsche Identifikation der Variablen, rein formales Umgehen,keine Rueckbindung an Erfahrung.

(3) Vorschlaege:
- Umrechnen "auf 100"
- Deuten von 360 Grad auf 100% (Kreisdiagramm)
- Keine Verhaeltnisgleichung verwenden.

TITELNUMMER: MP-3.0(22)

20 Isenberg,Helga;Krensch,Jochen;
30 /Diskussion zur Gestaltung des Stoffabschnitts "1.2.Prozentrechnung" in Klasse 7/.
51 /Mathematik in der Schule/,/1981/1,S.17-20.
71 Archiv;

99 Der Beitrag fasst Lehrerfahrungen (DDR) zur %-Rechnung und Sachaufgaben wie folgt zusammen (Kl.6/7):
(1) "Grundgleichung der Prozentrechnung" nicht zweckmaessig.
Wichtig: jeweils neue Ansaetze fuer jede neue Aufgabe.
(2) "Hinfuehrung auf 100" ueber Umrechnungstabellen bei Vergleichen zweckmaessig.
(3) Wichtig fuer den Unterricht:
- Analysieren der Aufgaben (Finden des "math.Kerns")
- Erfassen der Art der Proportionalitaet.
(4) Validitaet des Ergebnisses:
Schueler glauben ein Ergebnis,weil es "so herausgekommen ist",auch wenn es offensichtlich falsch ist.

TITELNUMMER: MP-3.0(23)

20 Geisinger,Kurt F.;Roberts,Dennis M.;
30 /Individual Differences in Calculator Attitudes and Performance in a Statistics Course/.
41 American Educational Research Association;
52 /Neunzehnhundertachtundsiebzig AERA Annual Meeting Abstracts of Papers and Symposia/.Washington: AERA/1978/,S.60-61.
56 pres.:engl.;
71 MA-AM 10-4;

90 Design:

a) Basis: 135 College-Studenten
b) Methode: 30 item-Test ueber Statistik; Auswertung durch Faktorenanalyse und Korrelationsberechnung.
c) Ziel: Zusammenhaenge zwischen statist. Rechnen und Gebrauch des Taschenrechners.

Ergebnisse:

a) 3 Faktoren spielen eine Hauptrolle
   - Vertrauenswuerdigkeit des Rechners
   - Nuetzlichkeit des Rechners
   - erzieherischer Wert (Rechner als "Lehrer").
b) Keine geschlechtsspezif. Unterschiede,aber das Alter ist ein wichtiger Faktor.Aeltere Schueler loesen die Aufgaben besser.

TITELNUMMER: MP-3.0(24)

30 /Prozent- und Zinsrechnen,Verhaeltnisrechnen/.
Fachdidaktische und didaktisch-methodische Teile.
Ein Fernstudienlehrgang.
40 Arbeiter,J.(Bearb.);Loercher,G.-A.(Bearb.);
Preiss,G.(Bearb.);
41 Deutsches Institut fuer Fernstudien(Tuebingen);
Universitaet(Tuebingen);
50 Weinheim:Beltz/1980/.153 S.
53 /Mathematik fuer Lehrer der Sekundarstufe I - Hauptschule.HE 1/
71 MA-AL 31-1;

99 Der Kurs bietet didaktische Analysen,Aufgaben
und Arbeitskarten zu den Themen Prozent- und
Zinsrechnen sowie Verhaeltnisrechnen.
Die reichhaltigen unterrichtlichen Hilfen gehen
alle von der Sachanalyse aus;empirische Forschungsergebnisse sind nicht beruecksichtigt.
Ziel des Kurses ist die Vermittlung von Wissen an
Lehrer,nicht die Bereitstellung methodisch-didaktischer Hilfestellungen fuer den Unterricht des
L.in konkreten Unterrichtssituationen (somit ein
Element der Weiterbildung/-qualifizierung).

2.4 Dokumente zum Thema:
Funktion, vor allem auch im Zusammenhang mit Proportionalitäten und Antiproportionalitäten

(Zugeordnete Abschnitte im Heft "Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: Proportion" sind vor allem: 6.1, 6.2, 7.3, 9.3)

Die hier gesammelten Dokumente erschöpfen das Thema nicht vollständig, sondern nur seinen Bezug zur proportionalen Fragestellung.

Zur Information des Lesers sind aber typische Untersuchungen beigefügt, die die Umrisse des Themas insgesamt zeigen.

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetzer, Herausgeber
41 Korporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

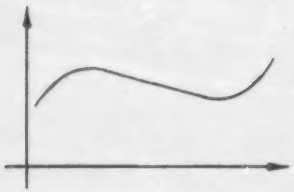
(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-4.0(01)

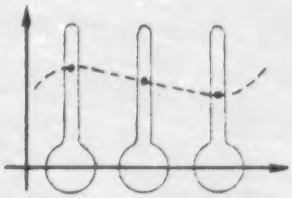
20 Watson,F.R.;
30 The /role of diagrams in mathematical education/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble: Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.271-277.
71 MA-AA 00-45;

99 1) Diagramme und Bilder sind im Mathematikunterricht scharf zu unterscheiden:
- Diagramme sind sachlogische Informationen, die 1-,2- oder 3-dimensional ausgebreitet sind
- Bilder sind aesthetische Konfigurationen.

2) Kenntnis und Umgang mit Diagrammen,vor allem von einem Standardrepertoire,sind wesentlich.
3) Unterscheidung und Verbindung von Diagrammen und Bildern sind fuer Schueler wesentlich.
4) Der Computer kann ueber die Vielfalt der moeglichen graphischen Ausgabeformen wesentliche Hilfen fuer den Umgang mit Diagrammen leisten.
5) Unterrichtliches Beispiel:



fuer viele Schueler ein "Bild", kein "Temperaturdiagramm".



fuer die Schueler ein "Temperaturdiagramm"

TITELNUMMER: MP-4.0(02)

20 Vergnaud,Gerard;Errecalde,Paule;
30 /Some steps in the understanding and the use of scales and axis by 10-13 year-old students/.
52 /Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education/, Berkeley,Calif.:Univ./1980/,S.285-291.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-52;

99 Design: a) Aufgabenstellung:
Gewichte,Alter,Geburtstage,Wurfweiten auf je einer Skala unterbringen.
b) Versuchspersonen:150 Schueler,10-13 Jahre, (vermutlich Frankreich)
c) Auswertung:Beobachtung;Auswerten von Zeichnungen.

Ergebnisse:

(1) Das Ordnen der Daten ist fuer alle leicht.
(2) Beim Unterbringen auf einer Skala treten mehr als 50 verschiedene Verfahren auf; es schaelen sich aber 2 Hauptauffassungen heraus:
- Daten werden als Skalenpunkte aufgefasst;
- Daten werden als Skalensegmente aufgefasst.
(3) Schueler,die die angegebenen Groessen als Punkte auffassen,kommen schnell zur Skala und zur Interpretation der Punktabstaende als Segmente.
(4) Schueler,die die angegebenenGroessen als Laengen (Segmente) denken,haben erhebliche Schwierigkeiten,diese auf Skalen zu uebertragen (Problem des gemeinsamen Anfangspunktes,des Ueberlappens von Segmenten etc.)

TITELNUMMER: MP-4.0(03)

20 Orton,A.;
30 /Teaching about Functions in the Secondary School/.
51 /Mathematics Teaching/,57/1971/,S.45-49.
56 pres.:engl.;
71 MA-AY 10-4;

99 Design: - Interviews zu verschiedenen Aspekten des Funktionsbegriffs mit 72 Schuelern einer comprehensive school,12-17 Jahre. Mittlere mathematische Begabung.
- Vergleich mit amerikanischer Studie von Thomas. (Zugrunde lag im Unterricht das uebliche Vorgehen (Relationen -> Funktionen auf Mengenzuordnungsbasis)).

Ergebnisse:

(1) Relation: - bei vielen Schuelern nicht voll verstanden
- Uebergang von Verwandtschaftsbeziehungen etc. zu mathmatischen Beziehungen ist schwer
- der Uebergang zu Paaren ist schwer.
- Relation und Funktion werden oft als von verschiedener Art oder auch als gleich angesehen.

Gruende:

(1) Anderes Vorverstaendnis von Relation
(2) Zu schnelle Uebergaenge
(3) Falsche Beziehung des didaktischen Vorgehens zum Vorverstaendnis.

(2) Diagramme m.Pfeilen: - diese Diagramme werden meist finit verstanden
- Uebergang zur Zahlengeraden schwer

Gruende:

(1) Optische Begrenztheit
(2) Fehlen einer Kontinuumsvorstellung von (Menge)Q oder (Menge)R

(3) Relationstypen: - totale Konfusion

Gruende:

1-1- Zuordnung ist der "natuerliche" Zuordnungstyp.

(4) Funktionskonzept als "geistige Verbindung" verschiedener Darstellungsformen und Begriffsbildungen:
- viele Schueler verbinden hier wenig miteinander.
  Meist wird vieles einfach unverbunden nebeneinander auswendig gelernt.

(5) Darstellung im Achsenkreuz:
- Suche nach geometrischen Mustern und Zeichnen von Verbindungslinien steht im Vordergrund.
- Ausfindigmachen von D(f),W(f) ist meist unmoeglich.

(6) D(f),W(f): - W(f) wird mehr beachtet
- Umkehren wird gut verstanden
- Sprachgebrauch "Bild" und "Vor-Bild" gut verstanden.

(7) Proportionalitaet: - das Funktionskonzept ist weniger an Intelligenzstruktur gebunden als das Prop.Konzept.
- Funktion kann unabhaengig (z.B.vor) Proportion behandelt werden.

Vorschlaege zum Unterrichten von Relationen/ Funktionen:

(1) Relation mehr als rein mathematischen Begriff einfuehren
(2) Pfeildiagramme nur bei endlichen Zuordnungen verwenden.
(3) Die eindeutigen Zuordnungen in den Mittelpunkt stellen;nicht zu viele Typen zu frueh bilden.
(4) Relations - und Funktionskonzept koennen erst am Ende stehen
(5) Nicht primaer lineare oder Liniengraphen behandeln.
(6) Umkehren naiv behandeln,keine Begriffsballaste. "Bild-" Sprache verwenden.
(7) Proportionalitaet nicht mit Funktionseinfuehrung koppeln.
(8) Ueber lange Zeit die Verbindung der verschiedenen Aspekte und der damit zusammenhaengenden Ideen als Ziel anstreben.

Bemerkung:
Diese Ergebnisse stehen in Uebereinstimmung mit Untersuchungen von Schildkamp-Kuendiger (ab 1978) Titelnummer:MP-4.0(06),Lovell/Butterworth(1966) u.a.

TITELNUMMER: MP-4.0(04)

20 Orton,A.;
30 A /Cross-Sectional Study of the Development of
the Mathematical Concept of a Function in Secondary
Schoolchildren of Average and Above Average Ability/.
37 Leeds,Univ.,Diss.,1970.
50 Leeds:Univ./1970/.
71 Archiv;

99 Design und Ergebnisse dieser Dissertation sind
kurz zusammengefasst beschrieben bei ORTON (1971),
Titelnummer:MP-4.0(03).
(Original nicht in unseren Bibliotheksbestaenden.)

TITELNUMMER: MP-4.0(05)

20 Kerslake,Daphne;
30 /Graphs/.
40 Hart,Kathleen(Hrsg.);
41 CSMS Mathematics Team;
52 /Childrens Unterstanding of Mathematics:11-16/,
London:Murray/1981/,S.120-136.
54 0-7195-3772-X;
56 pres.:engl.;
71 MA-AA10-8;

9 Teilbericht aus dem CSMS-Projekt (GB).
Design:13-15-jaehrigen Schuelern wurden Text-und Diagrammaufgaben zu grafisch-funktionalen Problemen gestellt.Zur Auswertung vgl. die Beitraege von K.HART.
Ergebnisse:
Es ergibt sich im wesentlichen eine Dreier-Gruppierung der Schueler:
- die "untersten" 30% der Schueler verstehen Blockdiagramme,die Benutzung von Koordinaten und koennen einfache lineare Diagramme interpretieren;
- die "mittleren" 50% koennen ausserdem nichtlinearen Graphen Informationen entnehmen,das Problem der "Stetigkeit" (i.S.von "durchgezogener Linie" vs."nicht durchgezogene Linie") erfassen und nicht-rechtwinkelige Koordinatensysteme benutzen;
- die "oberen" 20% koennen ausserdem e[illegible]ennen, wann Punkte durch eine Kurve verbunde[illegible] werden duerfen und wann nicht,sie koennen mi[illegible] Geradengleichungen umgehen und lineare Syste[illegible] loesen.

Der Beitrag gibt weitere Details zu Strategien der Schueler und zum Unterricht.

TITELNUMMER: MP-4.0(06)

20 Schildkamp-Kuendiger,Erika;
30 /Lernvoraussetzung - Lernergebnis/.Eine empirische Untersuchung zum Funktionsbegriff.
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover: Schroedel/1980/,S.282-285.
71 MA-AY 10-3;

99 Bericht aus einer laufenden Forschungsarbeit in Klasse 11 (Berufsaufbauschule):
(1) Die Begriffe "Relation" und "Funktion" werden (auf dem mengentheoretischen Weg der Spezialisierung des Begriffs) haeufig falsch erlernt.Oft wird Relation mit Funktion gleichgesetzt oder beides voneinander als verschieden betrachtet.
(2) Die mathematische Leistung im Gebiet der Funktionenlehre ist von Verstaendnis der Begriffe "Relation" und "Funktion" ziemlich unabhaengig.
Die Arbeit schildert die Anlage von Vortest und Nachtest sowie den Aufbau der Fehleranalysen,sie ist mit ausfuehrlichem Forschungsdesign in "Cognitive Development Research in Science and Mathematics",Titelnummer:MP-4.0(07),enthalten.

TITELNUMMER: MP-4.0(07)

20 Schildkamp-Kuendiger,Erika;
30 /Learning the concept of a function/.An analysis of the relationship between motivational variables and previous mathematical knowledge of pupils and teaching strategies.
41 Centre for Studies in Science Education,School of Education,University of Leeds;
52 /Cognitive Development Research in Science and Mathematics/,Leeds:Univ./1981/,S.181-190.
54 0-904 421-07-4;
pres.:engl.;
71 MA-AA 00-68;

99 Englische Fassung des Artikels von Schildkamp-Kuendiger(1980),Titelnummer:MP-4.0(06). In der englischen Fassung wird auch das Forschungsdesign ausfuehrlich beschrieben.

TITELNUMMER: MP-4.0(08)

20 Andelfinger,Bernhard;Weber,C.;
30 /Auswertung einer Umfrage zum Thema:"Funktion/".
50 Moenchengladbach:Fachseminar II Mathematik/1981/.3 S.
71 MA-AY 00-1;

99 Design:Spontanumfrage bei Schuelern zu 2 Fragen:
a) "Funktion" - was faellt euch dazu ein?
b) Wie kommt euch der Stoff vor?
Beteiligt waren ca.100 Gymnasial-Schueler (Kl.10-12).

Ergebnisse:

(1) "Funktion" ist fuer Schueler ein bekanntes Gebiet,nicht schwer,aber wenig interessant.
(2) Der relationentheoretische Ueberbau der Funktionenlehre ist nicht da oder falsch in der Erinnerung (Relation ungleich Funktion oder Relation gleich Funktion).
(3) In der Sekundarstufe I werden Funktionen mit algebraischen Techniken und Graphen assoziiert. In der Sekundarstufe II mit Kurven.

Die Arbeit bringt eine Reihe unterrichtlicher Vorschlaege zur Funktionenlehre.
Das zugrundeliegende Konzept dieser Untersuchung ist in "Provocative texts...",Titelnummer:MP-1.1(05), enthalten.

TITELNUMMER: MP-4.0(09)

20 Dreyfus,Tommy;Eisenberg,Theodore;
30 /Function Concepts:Intuitive Baseline/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble:
Equipe der Recherche Pedagogique/,S.183-188.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-45;

99 Design:3 verschiedene Fragebogen zu den grundlegenden Fragen des Funktionsverstaendnisses wurden Schuelern aus Kl.6-9 vorgelegt (Israel).Die Schueler waren vom oberen bzw.unteren Drittel (bezogen auf Leistung und soziale Schicht).

Ergebnisse:

1) Das Funktionskonzept beinhaltet viele,oft nur lose miteinander verbundene Unterkonzepte und hat verschiedene Repraesentationsformen.
2) Das Verstaendnis fuer das Funktions-Konzept nimmt vor allem in Klasse 9 zu,stagniert in Klasse 7/8.
Schueler vom oberen Drittel haben von Klasse 6 nach 7 einen Verstaendniszuwachs,die schwaecheren Schueler nicht.
3) Es ergeben sich nur geringe Unterschiede zwischen Jungen und Maedchen.
4) Die Fragen bez.des "Bild"- Konzepts (Funktion als Abbildung)waren am leichtesten,die zur Kurvenform am schwersten.
5) Schwaechere Schueler bevorzugen die Wertetafel, staerkere Schueler den Graph.
Daher im Unterricht differenzieren.

Hinweis:die Arbeit gibt wichtige weitere Literaturhinweise zum Funktionskonzept.

TITELNUMMER: MP-4.0(10)

20 Berner,Juergen;
30 /Einfuehrung in die Unterrichtseinheit "Lineare Funktionen/".Ein Unterrichtsversuch unter besonderer Beruecksichtigung der Arten des Lernens.
50 Stade:/1977/.64 S.
71 MA-AL 32-1;

Schultyp:	Berufsfachschule Berufsschule
Lernbereich/ Unterrichtsfach:	Mathematik
Art des Textes:	Unterrichtsentwurf
Unterrichtsgegenstand:	Lineare Funktionen. Arten des Lernens.

99 Design:Unterichtsreihe an einer Klasse einer 2-jaehrigen Berufsfachschule Wirtschaft (mit Test). Schriftliche Hausarbeit fuer die Zweite Staatspruefung.

Ergebnisse des Tests:

(1) Die Unterscheidung
"Funktion"
"keine Funktion"
ist von Schuelern zu leisten.
(2) Die Schueler wissen,dass die Begriffe D,W, Vorschrift mit Funktionen zu tun haben.
(3) Probleme treten bei Paardarstellungen,Uebertragen ins Achsenkreuz sowie bei der grafischen Deutung von Parameterveraenderungen in $y = mx + b$ auf.

(Bemerkung:
Der hier beschriebene Unterricht vermeidet die Einfuehrung und Verwendung des Begriffs "Relation". Er betrachtet nur Funktionen als Zuordnungen, ohne "Zuordnungen" zu thematisieren).

TITELNUMMER: MP-4.0(11)

20 Buehring,Manfred;
70 /Einfuehrung in die Unterrichtseinheit "Lineare Funktionen"/.Ein Unterrichtsversuch unter besonderer Beruecksichtigung das Grundsatzes der Anschaulichkeit,durchgefuehrt in einer Klasse der zweijaehrigen Berufsfachschule - Wirtschaft,-(Unterstufe) der Handelslehranstalt Stade.
50 Stade:/1977/.66 S.
71 MA-AL 32-2;

Schultyp:	Berufsfachschule
Lernbereich/	
Unterrichtsfach:	Mathematik
Art des Testes:	Unterrichtsentwurf
Unterrichtsgegenstand:	Lineare Funktionen. Ein Unterrichtsversuch unter besonderer Beruecksichtigung des Grundsatzes der Anschaulichkeit;

99 Design:Darstellung,Durchfuehrung und Auswertung eines siebenstuendigen Unterrichtsversuchs zum Thema "Lineare Funktionen".Verwandte Tafelbilder,Folien und Arbeitsblaetter sind beigefuegt.

Einige Ergebnisse:

(1) Anschaulichkeit ist hilfreich.
(2) Die "Bild"-Sprache (Urbild,Bild,Zielmenge) bewaehrt sich.
(3) Trotz Relationen-Vorbehandlung ist es fuer Schueler nicht einfach,zwischen "Funktion" und "Nicht-Funktion" zu unterscheiden.

(4) Obwohl die Schueler (nach Piaget) auf der formalen Denkstufe sein sollen,treten grosse Schwierigkeiten bei der Einfuehrung formaler Schreibweisen wie x -> f(x) auf.

(5) Es sind erhebliche Verstaendnisunterschiede zwischen Funktionen mit endlichen und/oder diskreten D- und W-Bereichen und unendlichen und/oder kontinuierlichen D- und W-Bereichen festzustellen.

(6) Die Deutung der Konstanten in x -> mx + b macht grosse Schwierigkeiten,ebenso damit zusammenhaengende Fallunterscheidungen.

TITELNUMMER: MP-4.0(12)

20 Ahlers,Rainer;
30 Die /Gestaltung der Unterrichtseinheit "Die lineare Funktion y=mx+n" unter besonderer Beruecksichtigung ausgewaehlter Verfahren zur Lernzielkontrolle/.
50 Oldenburg:/1976/.72 S.
71 MA-AL 10-1;

Schulstufe/Bereich:	Sekundarstufe II
Schultyp:	Berufsfachschule
Lernbereich/ Unterrichtsfach:	Mathematik
Art des Textes:	Unterrichtsentwurf
Unterrichtsgegenstand:	Lineare Funktion. Verfahren der Lernzielkontrolle;

99 Design:Es handelt sich um die Darstellung,Durchfuehrung und einen abschliessenden Test eines fuer drei Doppelstunden vorgesehenen Unterrichtsversuchs in einem 20 Schueler umfassenden Kurs der Klasse 11 (Berufsgrundschuljahr). Gruppe setzt sich aus den leistungsschwaecheren Schuelern zweier Klassen zusammen.

Ergebnisse:

(1) Bei der Behandlung linearer Funktionen war:
leicht:Wertetabellen aufstellen
schwierig:Eigenschaften des Graphen (Linearitaet,Steigung)
sehr schwierig:Rolle der Konstanten in $y = ax + b$
Die Handhabung von Funktionsgleichungen geschah sehr mechanisch.

(2) Es werden grosse Unterschiede zu Gymnasialklassen festgestellt (aus der Erinnerung des Autors heraus formuliert).

(3) Im Test zeigte sich eine grobe Trennung der untersuchten Klasse in 2 Teilgruppen (40% gut, 40% ganz schlecht).

(4) Fuer die Behandlung linearer Funktionen werden u.a. folgende Hinweise gegeben:
- Deuten von b in y = ax + b als "Sockelbetrag"
- zu vorgegebenen Wertetabellen die Funktionsvorschrift finden lassen.

TITELNUMMER: MP-4.0(13)

20 Haeussler,Peter;
30 /Denkoperationen und Lernprozesse 12 bis 16jaehriger Schueler beim Erkennen einfacher funktionaler Beziehungen im Physikunterricht/.
37 Kiel,Univ.,Mathematik-Naturwissenschaften,Habil., 1977.
50 Kiel:Univ./1977/.344 S.
71 PH-AA 00-12;

99 Design: 1) 2 Lernprogramme zum Erkennen einfacher funktionaler Beziehungen in physikalischen Messreihen werden an 2 Populationen untersucht.
(Vor- u. Nachtest,Zwischentests,Pilotstudie).
Jede Population etwa 250-300 Realschueler, davon je die Haelfte Jahrgangsstufen 7/8 und 9/10.
2) Lernprogramm A:
Prop. -> exp.-> umgekehrt prop. -> quadr. Funktion -> Wiederholung aller gelernten Algorithmen -> Messfehler.
Lehrprogramm B:
Allg.Suchalgorithmus ("eine konstante Groesse Suchen") -> prop./umgekehrt prop. -> quadr. -> exp. -> syst.Strategie -> Messfehler.
A: Spontanalgorithmen der Schueler verwendend,keine algor.Systematisierung.

Ergebnisse:

(1) Wertetabellen als "Suchreihen" guenstig.
Schueler gehen praktisch alle zu "vertikalen" Loesungsmethoden ueber bzw.bleiben dabei.
(2) A ist besser als B,vor allem im Langzeiteffekt

250

und der Transferfaehigkeit.

(3) Schon ab 12 Jahre gute Verhaltensdisposition, an Wertetabellen funktionale Beziehungen zu erkennen.
Bei juengeren Schuelern spielen dabei aber die numerischen Schwierigkeiten und das intuitive Erfassen eine groessere Rolle als bei aelteren.Das "verbale Ausdruecken" eines Algorithmus macht ihnen u.U. grosse Schwierigkeiten.

(4) Die Anknuepfung an die spontanen Loesungsalgorithmen ist besser;die systematischen sind lernbar,werden aber schnell wieder verlernt.
Mit den spontanen Algorithmen - an wenigen Funktionstypen dargelegt - koennen bereits nicht gelehrte Funktionen erkannt werden.

(5) "Proportionen" sind zu "leicht",um zu selbstaendiger Problemloesung zu kommen.Die quadr. Funktion ist zu schwer,die umgekehrte Proportion gerade richtig als "Funktions-Einstiegs-Problem".

(6) Proportionalaufgaben werden spontan auf eine Weise geloest,die auf andere Funktionstypen nicht transferierbar ist (nach dem Algorithmus: "9 mal in ....enthalten").Die Ueberbetonung von Prop.aufgaben kann daher "blockieren".

(7) Loesungsweg verbalisieren ist schwer;auch umgekehrt:verbale Statements ueber einen funktionalen Zusammenhang in eine Abfolge von Operationen zu uebersetzen.
Daher nicht Merksaetze,Regeln - sondern:
- Werte ausrechnen lassen
- Mit der Aufgabenstellung konfrontieren.

(8) Allgemeine Thesen:
- Schueler lernen mehr als das,was explizit gelehrt wird.Und dieses Lernen ist besonders resistent gegenueber Vergessensprozessen.
- Ein "gelehrter" Algorithmus bringt noch keinen

gleichmaessigen Abbau von Lernschwierigkeiten in allen Faellen,die mit ihm bearbeitet werden koennen.

- Selbsterarbeitete Problemloesungen sind bes. resistent gegenueber Vergessen.
- Exemplarisches Erarbeiten von Problemloesungen in ausgewaehlten,geeignet strukturierten Situationen ist paedagogisch besonders wertvoll.

(9) Die Arbeit enthaelt eine Forschungsuebersicht und eine Uebersicht ueber den did.-methodischen Diskussionsstand (S.111/112).
Hier Tendenzen dieser Zusammenschau:

- erst qualitativ,dann quantitativ
- an Wertetabellen Finden funktionaler Zusammenhaenge vor dem Darstellen z.B. "was bei allen Versuchsreihen gleich ist".
- Bedeutung der exp.-Funktion beachten.

TITELNUMMER: MP-4.0(14)

20 Suarez,Antonio;
30 /Formales Denken und Funktionsbegriff bei Jugendlichen/.Funktionale Begriffsbildung und Strukturierung des Kontinuums als Alternative zum formal-logischen Strukturalismus von Jean Piaget.
50 Bern:Huber/1977/.139 S.
53 /Psychologisches Kollequium.11/
54 3-455-80343-5;
71 MA-AY 00-11;

99 Design: (1) Analyse der (I,N,R,C) -Gruppe von Piaget (I=Identitaet,N=Negation, R=Reziprozitaet,C=Korrelativitaet)
(2) 3 Versuche zur direkten Proportionalitaet
-> (Herr Klein,Herr Gross und Herr Riese)

-> (Federgesetz)

-> (Versuch mit dem Fuellen verschieden dicker Glaeser)

(3) 3 Versuche zur reziproken Funktion (Schattenprojektion mit ganzzahligen und nicht-ganzzahligen Verhaeltnissen; Gleichgewichtsbedingung fuer Balkenwaage)
(4) 3 Versuche zur quadratischen Funktion (schiefe Ebene;Pendelschwingungen; Pendelschwingungen mit nur zwei Verhaeltnissen)

Anhang:Experimente zur Geometrie der irrationalen Zahlen.

Versuchspersonen:

Schueler von 10-16 J.;HS/RS/GY (Schweiz).
Ausserdem werden Vergleiche mit den Karplus-Studies (s.dort) durchgefuehrt,vor allem bei (2).

Ergebnisse:

Ad 1): Die Annahme von Piaget,dass sich die numerische Proportion durch logisches Abwaegen der "2 Groessen" in ihrem Veraenderungsverhalten aus der (I,N,R,C)-Gruppe ergibt,kann nicht akzeptiert werden. Dann muesste auch z.B.die indirekte Proportionalitaet aus derselben psychologischen Struktur herzuleiten sein,was aber nicht der Fall ist(s.u.).
Das proportionale Denken ist vielmehr eine allmaehlich erworbene Struktur.

Ad 2): - Willkuerliches Arbeiten und das Erhalten von Differenzen ist bei juengeren Schuelern typisch,ebenso orientieren sie sich an Mittelwerten und einfachen Verhaeltnissen (Doppeltes,die Haelfte).
- von 13-16 Jahren wird zwar (bis zu 70%-100%) proportional gerechnet,aber in der "Dreisatz-Form";nur 12%(13 J.)bzw. 35% (16 J.) verwenden Bruch-Verhaeltnisse. Lediglich bei ganzzahligen Verhaeltnissen ist der %-Satz hoeher.
Und erst bei aelteren Schuelern kann die funktionale Denkweise y=k.x erkannt werden.

Folgerungen:

1.Prinzip des proportionalen Denkens: die "isomorphe"

Veraenderung von
2 Groessen

2.Prinzip des proportionalen Denkens: die Abhaengigkeit der 2 Groessen voneinander

- beide Prinzipien entwickeln sich und interferieren:
  - die Isomorphie wird von einer additiven zu einer multiplikativen (entsprechend von einer bloss "gleichgerichteten" ("in gleichem Masse") zu einer "streng linearen")
  - die Abhaengigkeit der 2 Groessen wird von einem zuerst kaum beachteten "Zusammenhang" zu einem "Verhaeltnis" und zu einer "Funktion" (aber erst sehr spaet und nicht bei vielen!).

Ad 3): - ca 90% (K1.5/6) und 50%-70% (K1.7) und 20% (K1.9) koennen die Aufgaben nicht (sicher) loesen.Nicht-ganzzahlige Verhaeltnisse sind bedeutend schwieriger.
- Der Anteil der willkuerlichen Loesungen und der Schaetzungen ist gross.
  Es treten Strategien der Differenzvergleiche neu auf.
  Ausserdem tritt das Prinzip der "entsprechenden" Verhaeltnisse auf (Doppeltes,die Haelfte usw.),wird aber nicht zur allgemeinen Reziprozitaet verallgemeinert.

Folgerungen:

- Reziprozitaet wird als neuartig empfunden und von den meisten qualitativ erfasst (Zunahme-Abnahme)
- Das Problem wird als "Ueberwindung der Linearitaet" gesehen,aber meist nicht geloest.
- Ueberwindungsstrategien:
  - Vergleich von Zuwaechsen (Differenzen)

255

- Bilden zweier Relationen,die "sich entsprechen" (mal 2/durch 2)
- Formales Verstaendnis der reziproken Funktion nur bei sehr wenigen Schuelern; ist es ueberhaupt erreichbar?

Ad 4): - wird ueberhaupt erst von 16jaehrigen in nennenswertem Umfang richtig geloest und auch hier nur von 50% spontan mit quadratischen Zusammenhaengen.
- ist weniger "neuartig" und haengt auch nicht mit Faehigkeiten im Bereich der umgekehrten Proportionalitaet zusammen.
- Grosser Anteil willkuerlicher Verfahren, Loesungsversuche mit direkter Proportionalitaet,doppelten Differenzen.

Folgerungen:

- Sehr schwieriges Problem;auch qualitativ nur sehr schwer erfasst.
- Kein Zusammenhang mit indirekter Proportionalitaet.
- Die lineare Isomorphie wird immer als Ausgangspunkt genommen und/oder schleicht sich in die Argumentation ein.
- Das Bilden zweier Relationen,z.B. "dem Doppelten entspricht das Vierfache",nuetzt nur partiell, nicht allgemein.
  Es muessen mehrere solcher Relationen mal 3/durch 9, mal 4/mal 16 etc.gebildet werden,um den Zusammenhang zu entdecken.Diese "Verallgemeinerung von Denkoperationen 2.Ordnung" leisten nur 50% der Gymnasiasten mit 16 Jahren.

Schlussfolgerungen:

(1) "Proportionales Denken" ist ein Teilprozess innerhalb der allgemeineren Entwicklung des Funktionsbegriffs.

a) Hier sollte zuerst die Linearitaet mit ihren Aspekten (Additivitaet,Isomorphie) herausgearbeitet werden.

b) Ueberwindung der Linearitaet entscheidend, aber aeuserst schwierig.Evtl. Delta y/ Delta x als neue Funktionen betrachten.

(2) Die Akzeption der rationalen Zahlen als Zahlen ist ein weiteres wesentliches Moment fuer die Entfaltung mathematischen Denkens. Die Versuchspersonen vermeiden Brueche (z.B. schliessen von 2 auf 3 durch 2 -> 1 -> 2 + 1 = 3).
Durch Experimente und Ablesen an Skalen werden Brueche evtl.als Zahlen akzeptiert.

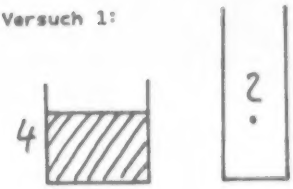
(3) Die Erfassung des Kontinuums scheint ganz ausserordentlich problematisch.

TITELNUMMER: MP-4.0(15)

20 Biner,Hermann;
30 Der /Begriff der Funktion im Volksschulunterricht anknuepfend an die Dreisatzlehre/.Zusammenfassender Bericht ueber Experimente,die in einer Schule in Zermatt durchgefuehrt worden sind,und deren Auswertung.
50 Zuerich:Limmat-Stiftung/1975/.8 S.
71 MA-AY 31-1;

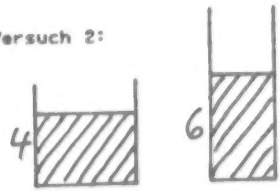
99 Design:die Arbeit untersucht an Fuellversuchen, inwieweit proportionale und funktionale Vorstellungen zusammenhaengen (vgl.Suarez 1977,Titelnummer:MP-4.0(14)):

Versuch 1:



wie hoch muss man im rechten Glas fuellen, wenn man gleichviel Wasser wie links haben will?
wie ist es bei 8,12,16 usw.im linken Glas?

Versuch 2:



Bei 4/6 ist es gleichviel. Wie dann bei 6/?,8/? etc.?

Beteiligt waren 106 Schueler,11-14 Jahre (Schweiz).

Feststellungen beim Schuelerverhalten:
(1) additive Strategie stark
(2) "je groesser,desto groesser" als qualitative (Vertikal-)strategie allen klar
(3) 14jaehrige arbeiten zu 70% proportional

(4) Bei juengeren kann zwar (z.B.durch Gegenbeispiele) die Additivstrategie "gestoppt", differenziert werden,aber nicht durch Proportionalstrategie ersetzt werden (gilt sicher bis 12 J.)

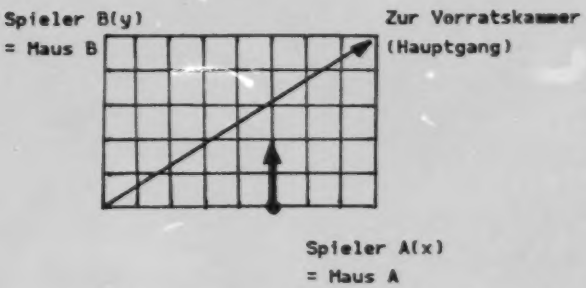
(5) "Das Doppelte" wird angewendet,aber als Sonderfall gesehen,nicht zur Proportion verallgemeinerbar".

(6) funktionale Gedanken werden nur sehr stark lehrerzentriert erreicht.

TITELNUMMER: MP-4.0(16)

20 Suarez,Antonio;Biner,Hermann;
30 Das /Mausspiel/.
Funktionsbegriff als stufenuebergreifende Komponente im Mathematikunterricht.
51 /Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik/,/1977/4,S.289-295.
56 pres:dt.;
71 MA-AA 00-69;

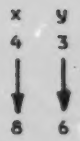
99 Design:Verhaltensbeobachtungen bei Schuelern von 7-13 Jahren.
Die Schueler spielen (mit verschiedenen Varianten) folgendes Spiel:



Maus A startet zum Hauptgang;
von wo muss Maus B starten,um A zu treffen?

Beobachtungen beim Schulerverhalten:

(1) Alle Schueler bestimmen y haeufig additiv, also: y = x + etwas.
Auch die Strategien des Verdoppelns und Halbierens werden eingesetzt.
(2) 11-12jaehrige Schueler wenden isomorphe Schlussrechnungsstrategien an:



(3) Der Anteil der funktional arbeitenden Schueler ($y = k \cdot x$) erreicht ca.20%.Diese beherrschen auch die anderen Strategien.

Allgemeine Feststellungen:

(1) direkte Proportionalitaet ist ein Hauptziel der mathematischen Grundbildung in allen Laendern der Welt.

(2) Sie ist durch verschiedene Teileigenschaften charakterisiert,"die im Geist der Kinder getrennt sind". "Darin besteht fuer die Schueler eine der Hauptschwierigkeiten fuer ein tieferes Verstaendnis der proportionalen Zusammenhaenge".

Unterrichtliche Vorzuege des Mausspiels:

(1) Einfuehrung des Koordinatensystems

(2) Verbindungsmoeglichkeit funktionaler und direkt-proportionaler Vorstellungen

(3) Notwendigkeit,gebrochene Zahlen zu verwenden. Sie werden als vollwertige Zahlen behandelt (Name der Mausegaenge).

(4) Moeglichkeit,den Taschenrechner in einer echten Berechnungssituation zu verwenden und seine Ergebnisse mit der (Spiel-)wirklichkeit zu vergleichen.

TITELNUMMER: MP-4.0(17)

20 Vollrath,Hans-Joachim;
30 /Schuelerversuche zum Funktionsbegriff/.
51 Der /Mathematikunterricht/,24/1978/4,S.90-101.
71 MA-AY 10-2;

Schulstufe/Bereich:	Sekundarstufe I
Lernbereich/	
Unterrichtsfach:	Mathematik
Art des Textes:	Experiment
Kontextmaterial:	Experimentier-anleitungen
Unterrichtsgegenstand:	Schlussrechnen und Funktionsbegriffe;

99 Die Arbeit stellt eine didaktische Analyse mit ausgewerteten Fallstudien dar;einige Ergebnisse:

(1) Schlussrechnung enthaelt keine logischen Schluesse (Kirsch,eine Analyse der sogenannten Schlussrechnung;MPSB 16(1969) S.41-55) und bringt keinen logischen Faehigkeitszuwachs (Smith,the effects of instruction in set theory upon the logical reasoning of seventh grade students and subsequent effects upon their learning to solve percentage problems; Arizona State University 1968).

(2) Heute steht methodisch vor allem die funktionale Deutung des Schlussrechnens im Vordergrund: "zum r-fachen gehoert das r-fache" (bzw.zur Summe gehoert entsprechende Summe) und das Loesen des Sachrechnens aus der engen Bindung an Proportionalitaeten und Antiproportionalitaeten.

(3) Feststellung aus Schulversuchen:

Schueler "loesen"funktionale (Schlussrechnungs-) Aufgaben lieber anhand von Wertetabellen oder durch sonstige Rechnungen als durch Ablesen am Graphen.

Anmerkungen:
Die im Unterrichtsversuch durchgefuehrten Fallstudien thematisierten physikalische Probleme (Rauminhalt eines Wassertropfens,Schwingungen eines Pendels,Naegel wiegen,Laengenaenderung einer brennenden Kerze bestimmen),technische Probleme (Messen der Gewindesteigung,Gewicht von Kabelstuecken) sowie eher mathematische (PI-Bestimmung durch Ausmessen von Dosen).

TITELNUMMER: MP-4.0(18)

20 Groeblinghoff,Franz-Josef;
30 /Dreisatzrechnung in einem modernen Mathematik-
unterricht/.
50 Paderborn:/1980/.80 S.
71 MA-AL 10-5;

99 Design:didaktische Analyse und persoenlicher Erfahrungs-
bericht (K1.6/7) zum Thema Dreisatzrechnung
mit ausfuehrlicher fachwissenschaftlicher
sowie fachdidaktischer Reflexion.

Ergebnisse:

(1) Fuer Schueler sind die Bereiche Proportionali-
taet und Antiproportionalitaet unverbunden
(2) Bei Nacheinander-Behandlung der Stoffe "direkter
Dreisatz" und "indirekter Dreisatz" am gleichen
Dreisatz-Muster tritt totale Verwirrung auf.
(3) Vorschlaege:
- Wertetafeln,Operatoren
- Rueckfuehrung auf gemeinsame Gleichung
z = x . y mit verschiedener Deutung.

2.5 Dokumente zum Thema:
Ähnlichkeit, vor allem auch im Zusammenhang mit dem allgemeinen geometrischen Umfeld

(Zugeordnete Abschnitte im Heft "Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: Proportion" sind vor allem: 6.1, 6.2, 7.4, 9.4)

Die hier gesammelten Dokumente erschöpfen das Thema nicht vollständig, sondern nur seinen Bezug zur proportionalen Fragestellung.

Zur Information des Lesers sind aber typische Untersuchungen beigefügt, die die Umrisse des Themas insgesamt zeigen.

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetzer, Herausgeber
41 Korporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-5.0(01)

30 /Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts/.
40 Lesh,Richard(Hrsg.);Mierkiewicz,Diane(Hrsg.);
41 Center for Science and Mathematics Education, Ohio State Univ.;
50 Ohio:State Univ./1978/.332 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-GE 00-2;

99 Forschungsreport des ERIC Clearinghouse (USA). Ueberblick ueber Ergebnisse der neueren Geometrieforschung bis 1978.
Zentrale Veroeffentlichung mit ausfuehrlichen Quellennachweisen.
Die Autoren der enthaltenen Beitraege sind:
R.Lesh,D.Mierkiewicz,K.Fuson,C.Murray, J.Musick,A.I.Weinzweig,D.Thomas,K.Schultz, F.R.Kidder,F.Perham,J.L.Martin,J.Moyer, H.Johnson,C.Dietz,J.Barnett,N.Fisher, A.Coxford.

TITELNUMMER: MP-5.0(02)

30 /Space and Geometry/.
40 Martin,J.Larry(Hrsg.);Bradbard,David A.(Hrsg.);
41 Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics;Department of Mathematics Education University of Georgia;
50 Ohio:State Univ./1976/.245 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-GE 00-3;

99 Forschungsreport des ERIC Clearinghouse (USA). Ueberblick und Ergebnisse der neueren Geometrieforschung bis 1976.
Wichtige Veroeffentlichung mit ausfuehrlichen Quellennachweisen.
Die Autoren dieser Veroeffentlichung sind: L.P.Steffe,T.J.Cooney,L.L.Hatfield,J.L.Martin, E.Robinson,C.D.Smock,I.Wirszup,I.Montangero, M.C.Mitchelmore,R.Lesh.

TITELNUMMER: MP-5.0(03)

20 Andelfinger,Bernhard;
30 /Zur Lage:Schulmathematik/.Standort und Perspektiven.
50 Freiburg:Herder/1979/.95 S.
54 3-451-18451-6;
71 MA-AA 10-14;

99 (1) Die Arbeit gibt auf den Seiten 14ff.einen Ueberblick ueber Schwierigkeitshierarchien in Geometrie fuer Absolventen der Grundschule sowie eine kurze Uebersicht ueber Ergebnisse der empirischen Geometrie-Forschung (samt Literaturnachweisen).
Global wird festgestellt,dass Schueler in der (Korgruenz-) Geometrie sich umfassendere Kenntnisse erwerben als in der Arithmetik.
(2) Die Arbeit berichtet ueber eine empirische Untersuchung an ca.700 Schuelern (Kl.5),insbesondere auch im Bereich elementare Geometrie/Symmetrie/Raumgeometrie.
Dabei zeigt sich,dass elementare geometrische Kenntnisse (einfache Konfigurationen,Laengen- und Flaechenmasse,elementare geometrische Relationen) sich zusammen mit den Rechenfertigkeiten in (Menge) N und bei Dezimalzahlen als ein Grundfaktor mathematischer Leistung praesentieren.
Die Raumgeometrie hebt sich dagegen als geschlossener und weit weniger allgemein zugaenglicher Block ab.

TITELNUMMER: MP-5.0(04)

20 Kuechemann,Dietmar;
30 /Reflections and rotations/.
40 Hart,Kathleen(Hrsg.);
41 CSMS Mathematics Team;
52 /Childrens Understanding of Mathematics:11-16/,
London:Murray/1981/,S.137-157.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-8;

99 Teilbericht aus dem CSMS-Projekt (GB)
Design:Schuelern wurden Spiegelungsaufgaben und
Drehungsaufgaben gestellt,wobei unterschiedliche Figuren an unterschiedlich liegenden Achsen zu spiegeln(bzw.zu drehen)waren. Zu den Auswertungsverfahren vgl.die Beitraege von K.HART.
Ergebnisse:
1) Bei Spiegelungsaufgaben ergaben sich folgende Verstaendnisebenen (in Klammern Schwierigkeitsgrad bei 14-jaehrigen):

Spiegeln eines Punktes im Gitter;
Spiegeln einer Strecke
an einer vertikalen Achse im Gitter;
Finden einer (vertikalen)
Symmetrieachse (erreichbar durch 80% der Schueler)
Spiegeln von Punkt und
Dreieck ohne Gitter (60%)

Finden der Koordinaten eines auf dem
Blatt nicht mehr erreichbaren Spiegelpunktes (42%)

Spiegeln von Faehnchen
ohne Gitter und bei
beliebiger Lage der Achse (30%)

269

2) Die meisten Schueler haben ein grundlegendes Verstaendnis von Spiegelung und Drehung,haben aber grosse Schwierigkeiten,dieses Verstaendnis auf eine kontrollierte,problembezogene Handhabung der Verfahren zu uebertragen.

Der Bericht gibt eingehende Daten zur Drehung und zum Unterrichten von Spiegelung und Drehung.

TITELNUMMER: MP-5.0(05)

20 Anthes,Erhard;
30 /Fertigkeiten und Problemloeseverhalten von Hauptschuelern im Mathematikunterricht/.
41 Paedagogische Hochschule Ruhr(Dortmund);Bundestagung fuer Didaktik der Mathematik(14,1980, Dortmund);
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover: Schroedel/1980/,S.21-24.
54 3-507-35016-5;
71 MA-AA 10-6;

99 Bei Hauptschuelern (Kl.8) wird festgestellt,dass beim Loesen geometrischer Probleme (Zerlegen, Ergaenzen,Konstruieren) das Fehlen der Faehigkeit zum "geometrischen Sehen" eine wichtige Fehlerquelle darstellt.Die Schueler koennen sich die Figur nicht passend zum Problem organisieren. Um die Haeufigkeit von Fehlern in diesem Bereich zu verringern wird vorgeschlagen,die notwendigen Techniken isoliert von anderen Schwierigkeiten an dazu besonders geeignetem Aufgabenmaterial zu vermitteln.Die Einuebung hat bis zu einem Fertigkeitsgrad zu erfolgen,der in einer konkreten Anwendungssituation nicht mehr als Fehlerquelle in Frage kommen kann.

TITELNUMMER: MP-5.0(06)

20 Glaser,Herbert;
30 /Symmetrieerfassung und das Loesen von Abzaehlproblemen/.
51 Der /Mathematikunterricht/,/1978/2,S.76-104.
71 MA-GE 10-2;

99 Die Arbeit schildert Strategien von Schuelern, Figurenraender abzuzaehlen,z.B.die Anzahl von Randquadraten eines groesseren Quadrats festzustellen.
Dabei zeigen sich ueberraschend viele verschiedene Strategien,von denen nur wenige ueberhaupt verallgemeinerbar sind.
Hinter jeder Strategie steht eine andere "Sicht" der Figur.

/ITELNUMMER: MP-5.0(07)

20 Glaser,Herbert;
30 /Loesungsstrategien bei Abzaehlproblemen/.
41 Paedagogische Hochschule Ruhr(Dortmund);Bundestagung fuer Didaktik der Mathematik(14,1980, Dortmund);
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover: Schroedel/1980/,S.110-113.
54 3-507-35016-5;
71 MA-AA 10-6;

99 Kurzfassung des Beitrags von GLASER in MU 2/78 (Titelnummer:MP-5.0(06)).

TITELNUMMER: MP-5.0(08)

20 Hirstein,J.J.;Lamb,C.E.;Osborne,A.;
30 /Students misconceptions about area measure/.
51 /Arithmetic Teacher/,25/,/6,S.10-16.
71 Archiv;

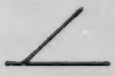
99 Aus Unterrichtsbeobachtungen und Schuelerbefragungen wurden im 3.bis 6.Schuljahr fuenf Typen von Missverstaendnissen beim Begriff des Flaecheninhalts ebener Figuren identifiziert:Verwendung der Laenge einer Dimension zur Flaechenabschaetzung; primitive Kompensationsmethoden;Punkteabzaehlen fuer die Flaeche;Zaehlen um die Ecke;Punktzaehlen linearer Einheiten.Moeglichkeiten zur Diagnose und Beseitigung solcher Missverstaendnisse werden aufgezeigt.

TITELNUMMER: MP-5.0(09)

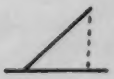
20 Fuson,Karen C.;
30 An /Analysis of Research Needs in Projective, Affine,and Similarity Geometries/.Including an Evaluation of Piaget's.
41 Center for Science and Mathematics Education, Ohio State Univ.;
52 /Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometrie Concepts/,Ohio:State Univ./ 1978/,S.243-260.
56 pres.:engl.;
71 MA-GE 00-2;

99 Referat ueber die Piaget-Versuche.
Zu den Versuchen zur Aehnlichkeit:

(1) Es gibt keine vergleichbare intuitive Anfangsstufe wie bei der Proportionalitaet.
Am fruehesten kommt die Idee der Parallelitaet von Seiten.
(2) Dann folgt erst der Winkelvergleich und das proportionale Abmessen (nur bei einfachen Verhaeltnissen 2:1,sonst "Additions-strategie") und das proportionale Zeichnen.
(3) Beherrschen des Erkennens und Herstellens aehnlicher Figuren kommt spaet (erst nach 11 Jahren).
(4)



beim Reproduzieren dieser Figur kommt der "Neigungsaspekt" erst spaet.



Die aelteren Schueler benutzen dann die vertikale Hilfslinie. (vertikales Orientierungssystem).

TITELNUMMER: MP-5.0(10)

20 Martin,J.Larry;
30 The /Child's Concept of Ratio of Distances/.
41 Center for Science and Mathematics Education,
Ohio State Univ.;
52 /Recent Research Concerning the Development of
Spatial and Geometrie concepts/,Ohio:State Univ./
1978/,S.261-272.
56 pres.:engl.;
71 MA-CE 00-2;

90 Design: - didaktische Analyse,Auswertung empirischer
Untersuchungen
- Test zum Uebertragen gleicher Proportionen auf einer Stecke:

- 40 Schueler (10 Schueler 3rd grade,
10 Schueler 4th und
20 Schueler 5th grade).

Ergebnisse:

(1) Aehnlichkeit hat mehrere Aspekte (3 Variablen|):
Parallelitaet,Winkelgleichheit,Seitenpropotionalitaet
(2) Parallelitaets-Strategien kommen vor Winkelkongruenz-Strategien (erst ab etwa 11 Jahre).
Erfassen aehnlicher Rechtecke vor richtigem Zeichen aehnlicher Rechtecke.
(3) Die geometrisch bedeutsame Proportion ist "die Erhaltung des Verhaeltnisses" (in verschiedenen Figuren bzw.Bezugssystemen).
Die geometrische Proportionalitaet ist eine

"externe" Proportion.
Hier werden verschiedene Grundeinheiten unterteilt||

(4) Die 5th grader loesen den Test "dramatisch" besser (>= 75%) als die 3rd und 4th grader (< 50%).
Bei einem 2-dimensionalen Test,wie er der Aehnlichkeit gemaess waere,sind Verbesserungen erst in noch hoeherem Alter zu erwarten.

(5) Haeufigste Fehlerstrategie:
Erhaltung der Distanz vom Teilungspunkt zum rechten Stabende (viel weniger haeufig - und da ganz inkonsequent - zum linken Stabende).

TITELNUMMER: MP-5.0(11)

20 Vollrath,Hans-Joachim;
30 /Lernschwierigkeiten,die sich aus dem umgangs-
sprachlichen Verstaendnis geometrischer Begriffe
ergeben/.
41 Institut fuer Didaktik der Mathematik(Bielefeld)
Universitaet(Bielefeld);
52 /Institut fuer Didaktik der Mathematik/,Bielefeld:
Univ./1978/,S.57-73
53 /Schriftenreihe des Instituts fuer Didaktik der
Mathematik.18/
71 MA-AA 00-73;

99 Design:Fallstudien und Unterrichtsversuche an
HS und Gy

Ergebnisse:

(1) Begriffe - z.B."aehnlich" - koennen ohne
formale Definition durch Beispiele und
Gegenbeispiele erworben werden.
Dabei sollte aber ihr mathematikspezifischer
Gehalt deutlich werden.
Z.B. ist
"aehnlich" = "unverzerrt"

besser als

"aehnlich" = "Uebereinstimmung in
moeglichst vielen
Eigenschaften"

zu definieren.

(2) "Natuerliche" Aehnlichkeitsverhaeltnisse sind
2 : 1 und 1 : 2.

(3) Schueler unterscheiden Quadrat und Rechteck

TITELNUMMER: MP-5.0(13)

20 Vollrath,Hans-Joachim;
30 The /Understanding of Similarity and Shape in Classifying Tasks/.
51 /Educational Studies in Mathematics/,8/1977/, S.211-224.
56 pres.:engl.;
71 MA-GE 00-5;

99 Englische Fassung des Beitrags von VOLLRATH in MU 2/78 (Titelnummer:MP-5.0(12)),z.T. erweitert.
Es wird vor allem darauf hingewiesen,dass "aehnlich" sich vom Vorverstaendnis der Schueler her mehr auf Attribute einer Figur bezieht,waehrend die Frage nach der "Gestalt" einer Figur sich mehr mit Formelementen verbindet.

TITELNUMMER: MP-5.0(14)

20 Manceau,Jean-Pierre;
30 /Proportionnalite sur du papier/.
51 /Bulletin de L'Association des Professeurs De Mathematiques/,58/1979/318,S.209-218.
56 pres.:franz.;
71 MA-GE 00-6;

99 Eine Darstellung von Aufgabenfolgen zur Verbindung des Proportionalitaetsgedankens mit geometrischen Darstellungen (Wertetafeln und Papier-Flaechen-Versuche). Hierbei wird auch die Aehnlichkeitsvorstellung gefoerdert und es werden Wege zu trigonometrischen Deutungen gezeigt.

in vorgelegten Figurensammlungen
als verschiedene Figuren,zerlegen die Klasse
der Rechtecke aber nicht weiter,obwohl es nach
dem Aehnlichkeitsbegriff moeglich waere(weniger
Schwierigkeiten ergeben sich bei der Klasse
der Dreiecke).

TITELNUMMER: MP-5.0(12)

20 Vollrath,Hans-Joachim;
30 /Klassifikationen nach Aehnlichkeit/.
51 Der /Mathematikunterricht/,/1978/2,S.105-115.
71 MA-GE 00-4;

99 Design:Verschiedene Mengen von Figuren (ausgeschnittene Papierfiguren) sollen so sortiert werden,dass zueinander "aehnliche" Figuren auf je einem Haufen liegen.
(Der Begriff "aehnlich" wird nicht definiert).
Beteiligt waren 110 Schueler verschiedener Klassen und Schularten (hauptsaechlich von 10-15 Jahren).

Ergebnisse:

(1) Die Sortierkategorien schwanken;vor allem "rund/eckig" spielt eine grosse Rolle.
(2) Der Einbezug von Seitenverhaeltnissen ist sehr gering.Die Vorstellung von "Aehnlichkeit" (im umgangssprachlichen Sinne) ist damit nicht verknuepft.
(3) Es ergeben sich alters- und schulartspezifische Unterschiede.

2.6 Dokumente zum Thema:
Bruchrechnen, vor allem auch im Zusammenhang mit dem Konzept der rationalen Zahl

(Zugeordnete Abschnitte im Heft "Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: "Proportion" sind vor allem: 6.1, 6.2, 7.5, 9.5)

Die hier gesammelten Dokumente erschöpfen das Thema nicht vollständig, sondern nur seinen Bezug zur proportionalen Fragestellung.

Zur Information des Lesers sind aber typische Untersuchungen beigefügt, die die Umrisse des Themas insgesamt zeigen.

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetzer, Herausgeber
41 Korporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-6.0(01)

20 Payne,Joseph,N.;
30 /Review of Research on Fractions/.
41 Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics,Department of Mathematics Education Univ.of Georgia;
52 /Number and Measurement/,Georgia:Univ./1975/, S.145-187.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-3;

90 Design:Forschungsvergleich

Ergebnisse(ausgewaehlt):

(1) Cobern (1973) vergleicht (fuer 4th-grader) die Effizienz eines REGION-Modells ("Kuchenmethode") mit einem RATIO-Modell (Verhaeltnismodell) der Bruchrechnung (wobei das Verhaeltnis als Teil-Teil-Vergleich eingefuehrt wird).
Dabei schneidet das REGION-Modell durchweg besser ab als das RATIO-Modell,auch bei Verhaeltnis-Aufgaben.

Vermutung: Verhaeltnis-Vorstellungen lassen sich leichter durch "region"-Vorstellungen realisieren als umgekehrt.

(2) Eine proportionale oder verhaeltnisbezogene Behandlung aequivalenter Brueche sollte nicht am Anfang erfolgen.

(3) Die Interpretation von a/b als a:b ist fuer Schueler schwierig.

(4) Die Aufgabe "a/b von c" ist fuer Schueler extrem schwierig.

(5) Bruchrechnung zu lehren dauert einen viel laengeren Zeitraum als in Curricula vorgesehen.

Anmerkung: der Artikel von Payne gibt einen guten Ueberblick ueber die derzeitige Erkenntnis- u.Problemlage bei der Unterrichtsforschung zum Thema "Bruchrechnen".

Literaturhinweis: Coburn,T.G.:The effect of a ratio approach and a region approach on equivalent fractions and addition/subtraction for pupils in grade four (Doctoral dissertation,The University of Michigan,1973). (Dissertation Abstracts International,1974,34,4688A-4689A, University Microfilms No.74-3559).

TITELNUMMER: MP-6.0(02)

20 Harrison,Bruce;
30 /Ratios and Fractions/.A Cognitive Gap Between Students and Conventional Curricular Demands?
51 /Abstracts of Short Commications/,/1980/4,S.35.
71 Archiv;

99 Design: 830 australische Schueler,12-13 Jahre alt, wurden nach Piaget-Stufen sortiert. Dasselbe wurde mit den Texten der Schulbuecher fuer diesen Altersbereich gemacht.

Ergebnisse:

(1)

Konkret	transitorisch	formal	
50	40	10	(Schueler)
4	20	76	(Buecher)

(2) Eine am konkreten Level orientierte und prozessbezogene Unterrichtsstrategie war erfolgreich.

(Original nicht in unseren Bibliotheksbestaenden.)

TITELNUMMER: MP-6.0(03)

20 Hart,Kathleen;
30 /From whole numbers to fractions and decimals/.
52 /Recherches en didactique des mathematiques/
1980/,S.61-74.
56 pres.:engl.;
71 MA-AL 00-5;

99 Design:Auszug aus dem Forschungsbericht des
CSMS-Projekts (s.HART,Titelnummer:
MP-1.2(11)).

Ergebnisse:

(1) Die Schueler haben eine Abneigung gegen die Einfuehrung anderer Zahlen als die natuerlichen Zahlen.
(2) Die Schueler versuchen,innerhalb der natuerlichen Zahlen zu verbleiben.
(3) Auch die Rechentechniken mit natuerlichen Zahlen beherrschen nicht alle Schueler.
(4) Die Zunahme der Rechenkenntnisse mit dem Alter sind geringer als normal angenommen.

TITELNUMMER: MP-6.0(04)

20 Baireuther,Peter;
30 /Bruchrechnen-Vergebliche Liebesmuehe/?Gedanken zur Praxis in der Hauptschule.
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover: Schroedel/1981/,S.14.
71 MA-AL 10-14;

99 Thesen:
(1) Bruchrechnen ist eine inhaltliche Ueberforderung fuer die Orientierungsstufe,insbes. das Zahlbereichserweiterungs- und Aequivalenz-Klassenprinzip.
(2) Bruchrechnen ist der Hauptschule nicht angemessen und kein unverzichtbares Bildungsgut.

TITELNUMMER: MP-6.0(05)

20 Harrison,Bruce;Brindley,Selwyn;Bye,Marshall P.;
30 /Documentation of teacher movement toward process-enriched teaching of fractions and ratios/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble: Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.216-221.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-45;

99 Design: Durchfuehren und Testen eines breit und experimentell angelegten Curriculums zu Bruechen und Verhaeltnissen in Kl.7/8 (je ca.400 Schueler) im Vergleich zu Normalklassen.

Ergebnisse:

(1) Curriculare Anforderungen und Leistungsfaehigkeit der Schueler klaffen sehr weit auseinander.
(2) Vor allem in Kl.7 bringen konkretes Material, Experimente,Differenzierung im angesprochenen Gebiet Leistungszuwachs und Angstabbau.
(3) Beispiel:
es werden verschiedene Streifen (gleiche Breite, verschiedene Laenge) zur Verfuegung gestellt. Der Schueler soll durch Kombinieren die maximale Anzahl von Verhaeltnissen zusammenlegen.

TITELNUMMER: MP-6.0(06)

20 Hershkowitz,Rina;Vinner,Shlomo;Bruckheimer, Maxim;

30 /Some cognitive factors as causes of mistakes in the addition of fractions/.

52 /Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education/, Berkely,Calif.:Univ./1980/,S.24-31.

56 pres.:engl.;

71 MA-AA 00-52;

9% Design:Es ist eine empirische Untersuchung an 500 israelischen Schuelern im Alter von 13 bis 15 Jahren zum Thema Addition von Bruechen dargestellt.Die Aufgabenstellung war:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Ergebnisse:

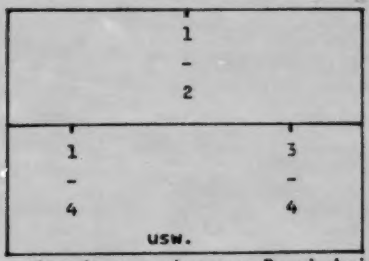
(1)	Richtig	Fehlerhaft: Zaehler-Nenner-Additions-Strategie	alle anderen Fehler zus.
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	58%	19%	16%
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	45%	24%	22%

Die Differenz zu 100% ergibt die Kategorie "keine Antwort".

(2) a) Rekonstruktion von Details,Analogiebildung
und Interpretation von Symbolen sind wichtige
Faehigkeiten,fuehren aber z.B. gerade in
diesen Faellen zu "falschen Regeln",z.B.
-> "Zaehleroperation analog Nenneroperation"
-> "Nenner hat gleiche Qualitaet wie Zaehler"

b) Allgemein: Gefahr des Mathematikunterrichts,dass
Konzepte verwendet werden ohne vor-
herige Internalisierung des Tatbestands.

(3) Eine unterrichtliche Therapie:
a) "fraction chart" als Pruefungsinstrument und
veranschaulichung der Brueche als Quantitaeten:



b) Verwenden des gemeinsamen Bruchstriches beim
Addieren.

TITELNUMMER: MP-6.0(07)

20 Streefland,Leen;
30 /Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction/.
51 /Educational Studies in Mathematics/,9/1978/2, S.51-73.
56 pres.:engl.;
71 MA-AL 00-6;

99 Design:Fallstudien zur Bruchrechnung;

Ergebnisse:

(1) Demonstration von 1/4 ausschliesslich an solchen Figuren ist fehlertraechtig, da Verwechslung mit "4" entsteht ((MENGE) N|) und somit etwa $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$

da $8 > 4$.

(2) Erweitern ist grafisch einsichtig,aber in der Bruchschreibweise nicht mehr.
(3) Teilen und "ohne Rest aufteilen" ist bei der Brucherzeugung gleichzeitig zu leisten.Das ist schwierig fuer Kinder.
(4) Bevor das "mathematische Bruch-Konzept" formiert ist, muss sich im Geist des Kindes der Bruch als "geistiges Objekt" formiert haben und verfuegbar sein.(Freudenthal).

TITELNUMMER: MP-6.0(08)

20 Fend,Helmut;Dreher,Eick;Haenisch,Hans;
30 /Auswirkungen des Schulsystems auf Schulleistungen und soziales Lernen/.Ein Vergleich zwischen Gesamtschule und dreigliedrigem Schulsystem.
50 /Zeitschrift fuer Paedagogik/,/1980/5,S.673-698.
71 MA-AA 00-71;

99 Design: - Faktorenanalysen verschiedener Testbatterien
- Einstellungsskalierungen
- Typ: Vergleichsuntersuchung traditonelles System/Gesamtschule

Ergebnisse fuer Mathematik K1.5/6

(1) Ausser bei "Intelligenzaufgaben" und bei "Bruchrechnen" (K1.6) keine Einfluesse des Schulsystems.
(2) Folgerungen/Erklaerungen:
a) "Bruchrechnen" in K1.6 besser,wenn ein Lerngelegenheitsvorteil besteht wie an der GS.
b) Uebrige mathematische Leistung ist eine systemunabhaengige Variable,die von anderen - "inneren" - Variablen abhaengt.

TITELNUMMER: MP-6.0(09)

20 Machida,Shiochiro;
30 /New Computation System with flexibility/.
51 /Abstracts of Short Communications/,/1980/4,S.60.
71 Archiv;

99 Didaktische Prinzipien angesichts der zunehmenden Benutzung von Taschenrechnern:
(1) Roh-Abschaetzungen von Ergebnissen beachten, dabei spezielle Tests fuer falsche Tastendrucke und overflow-Fehler entwickeln.
(2) Ein Gefuehl fuer die Groesse von Dezimalzahlen entwickeln.
(3) Die dezimale Struktur von ganzen Zahlen und Dezimalzahlen als gemeinsam bewusst machen.
(4) Die Kopfrechenmethoden und die Berechnung selbst in Uebereinstimmung bringen (durch figuale Verfahren).
(5) Die Rechenmethoden mit der Entwicklung des Zahlenverstaendnisses beim Kind in Uebereinstimmung bringen.
(Original nicht in unserem Bibliotheksbestaenden.)

TITELNUMMER: MP-6.0(10)

20 Maier,H.;
30 /Schuelerfehler im Mathematikunterricht/.
(1.Bericht - September 1980).
50 Regensburg:Seminar fuer Didaktik der Mathematik
/1980/.47 S.
71 MA-AA 00-72;

99 Praxisbezogene,durch empirische Erhebungen abgesicherte Zusammenstellung und Klassifikation von Schuelerfehlern in Arithmetik,Algebra und Geometrie (Flaechenberechnung).
Es werden auch primaere und sekundaere Fehlerursachen untersucht sowie Massnahmen zum Abbau von Fehlern angegeben.
Der Bericht ist ein Auszug aus einem laufenden Forschungsprojekt;er enthaelt Hinweise auf veroeffentlichte und unveroeffentlichte Literatur.
Bezueglich der Bruchrechnug finden sich vor allem Verstoesse gegen Verknuepfungsvorschriften (Regelfehler),die im Einzelnen beschrieben werden.

TITELNUMMER: MP-6.0(11)

20 Loercher,Gustav Adolf;
30 /Schwierigkeiten beim Bruchrechnen/.
41 Paedagogische Hochschule Ruhr(Dortmund);Bundestagung fuer Didaktik der Mathematik(14,1980, Dortmund);
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover: Schroedel/1980/,S.209-212.
54 3-507-35016-5;
71 MA-AA 10-6;

5 An empirischen Erhebungen in Realschulen und Hauptschulen wird gezeigt:
a) Der zeitliche Aufwand um die Bruchrechnung steht in keinem Verhaeltnis zum Erfolg. Erst in Kl.7 und 8 entstehen sichere Kenntnisse.
b) Das Kuerzen ist fuer Schueler nicht einfach.
c) Der Zeitbedarf fuer das Loesen einer Bruchrechenaufgabe wird i.A. unterschaetzt.
d) Regelfehler und fehlerhafter Umgang mit gemischten Zahlen sind sehr haeufig.
e) Es bilden sich bei ca.1/4 der Schueler systematische Fehler heraus (Fehlermittel 60%, davon 30% durch systematische Fehler bedingt).
Der Beitrag gibt Hinweise fuer den Unterricht und Tips zur Fehlerdiagnose.

TITELNUMMER: MP-6.0(12)

20 Hasemann,Klaus;
30 /Ueber die Verstaendnisschwierigkeiten von Hauptschuelern bei der Bruchrechnung/.
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/Hannover: Schroedel/1978/,S.120-123.
71 Archiv;

99 Bei leistungsschwaecheren Schuelern der Kl.6/7 (Hauptschule) wird festgestellt,dass diese Schueler keine Vorstellung von Bruechen besitzen. Sie haben zwar die Faehigkeit,Algorithmen der Bruchrechnung im engsten Umfeld anzuwenden,versagen jedoch bei Koppelung verschiedener Algorithmen. Sie glauben auch unsinnige Ergebnisse.

TITELNUMMER: MP-6.0(13)

20 Andelfinger,Bernhard;
30 /Brueche oder Dezimalzahlen?
1-2/.Auswertung einer Leser-Anfrage.
50 /MM-Journal/,/1980/29,30,Getr.Zaehlg.
71 MA-AL 00-7;

99 Design:Umfrage bei den Lesern der Zeitschrift (Umfragetext s.MM-Journal 27/Dezember 1979) und Auswertung der eingegangenen Antworten. Es sind ca.70 Zuschriften verwertet worden, davon 19 von Realschullehrern und 36 von Gymnasiallehrern.

Ergebnisse:

(1) Lerndefizite:werden in der Bruchrechnung als sehr gross eingeschaetzt,in der Dezimalrechnung als viel geringer.
(2) Lernschwierigkeiten bei der Bruchrechnung:
- viele Schueler haben keine konkrete Vorstellung des Bruches;
- die Regeln sind zu abstrakt,das Regelgebaeude ist zu gross;
die mit dem Bruchrechnen verbundenen "Natuerliche-Zahlen-Techniken" (Erweitern etc.) sind schwer;
- die Lernzeit ist zu gering;
- Multiplikation und Division von Bruechen kann nicht verstanden werden.

(3) Lernschwierigkeiten bei der Dezimalrechnung:
- Hauptschwierigkeit ist die Stellung des Kommas;
- Potenzieren,Dividieren und Umwandeln von Dezimalzahlen in Brueche (u.umgekehrt) ist ebenfalls schwer.

(4) Der Beitrag gibt eine Reihe weiterer Einschaetzungen des Bruch- und Dezimalrechnens durch Lehrer an,beschreibt Fehlerursachen und Therapie-Vorschlaege.

In der Fortsetzung des Beitrags (MM-Journal 30 Dezember 1980) werden Unterrichtsvorschlaege zur Bruchrechnung geschildert,die den Zuschriften der befragten Zeitschriften-Leser zu entnehmen waren.

TITELNUMMER: MP-6.0(14)

20 Suydam,Marilyn N.;Osborne,Alan;
30 /Algorithmic Learning/.
40 Suydam,Marilyn N.(Hrsg.);Osborne,Alan Fr.(Hrsg.);
41 Eric Science,Mathematics and Environmental Education Clearinghouse (Ohio);University (Ohio);
50 Ohio:University/1977/.197 S.
53 /Mathematics Education Reports./
56 pres.:engl.;
71 MA-AL 10-21;

99 Sammelband zum Forschungsstand im Bereich algorithmischen Lernens.

Einige fuer das Lehren von Bruchrechnen wichtige Ergebnisse:
(1) - Beim Dividieren (von Bruechen) ist der Lernerfolg der Hauptnenner-Methode im Vergleich zu allen anderen gaengigen Verfahren am geringsten;
(2) - beim Addieren/Subtrahieren ist die Benutzung von Koerpereigenschaften erfolgreicher als die Benutzung von Aequivalenzklassen;
(3) - beim Multiplizieren ist die Flaechendeutung (mit Diagrammen) besonders erfolgreich gegenueber der Anteil-Deutung.
(4) - die Quotientenauffassung von Bruechen ist bei Schuelern haeufig ungesichert.Sie laesst sich aber durch Einsatz des Taschenrechners foerdern,ebenso durch die Umformung von Bruechen in Dezimalzahlen.
(5) - Um ein "Zahlengefuehl" bei Bruechen zu foerdern,ist das Pruefen von Ergebnissen bei Bruchrechnungen besonders wichtig.
Der Band enthaelt ferner Aussagen zu dem Bereich Sachrechnen/Textaufgaben,siehe Titelnummer:MP-7.0(05).

300

TITELNUMMER: MP-6.0(15)

20 Novillis,Larson;
30 /Locating proper fractions on number lines/.
51 /School Science Mathematics/,/1980/6.
71 Archiv;

99 An empirischen Versuchen wird festgestellt,dass es fuer Schueler (Sekundarstufe I) wesentlich schwieriger ist,einen echten Bruch mit einem Punkt auf der Zahlengeraden zu assoziieren als mit einem "Teil-Gesamtheit-" Modell,wo die Einheit ein geometrischer Bereich,oder mit einem "Teil-Gruppen-" Modell,wo die Einheit eine Menge ist.

TITELNUMMER: MP-6.0(16)

20 Suydam,Marilyn N.;
30 /Review of recent research.Related to the concepts of fractions and of ratio/.
52 /Proceedings of the second international conference for the psychology of mathematics education/, Osnabrueck:Univ./1978/,S.296-332.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-35;

99 Es handelt sich bei diesem Beitrag um eine umfassende und aeusserst detaillierte Darstellung des (vorzugsweise angelsaechsischen) Forschungsstandes der empirischen Unterrichtsforschung bis 1978.
Folgende globale Hinweise sind zu entnehmen:
- die Bruchrechnung macht Schuelern allgemein enorme Schwierigkeiten;
- die Faehigkeit,mit ganzen Zahlen zu rechnen, ist weit hoeher als die,mit Bruechen zu rechnen;
- der Umfang rein "manipulativen" Umgehens mit den Bestandteilen der Brueche ist gross.
- die Entwicklung einer Bruchvorstellung ist entscheidend;sie ist sehr langwierig und muss im Rahmen der Entwicklung einer Vorstellung von der "rationalen Zahl" gesehen werden.Daher bestehen sehr enge Zusammenhaenge zwischen der Pflege proportionalen Denkens und dem Bruchrechnen.
- fuer das Unterrichten der Bruchrechnung sind konkrete,modellfaehige Wege sehr wichtig.Das formale Bruchrechnen sollte nicht zu frueh kommen.

Eine sehr detaillierte,etwa 50 wichtige Forschungsarbeiten umfassende,Literaturliste ist beigefuegt.

TITELNUMMER: MP-6.0(17)

20 Flade,Lothar;
30 /Zur Entwicklung von Rechenfertigkeiten und zu einigen typischen Schuelerfehlern/.
51 /Mathematik in der Schule/,14/1976/7-8,S.371-376.
71 MA-AL 10-11;

99 Design:Rechenaufgaben (dezimal u.gebrochen;bei Kl.7 auch mit verschiedenen Vorzeichen) an je etwa 400 Schuelern aus Kl.6 und 7.

Ergebnisse:

(1) Leistungen in Kl.7 i.A.schlechter als in Kl.6.
(2) Hauptfehler:
  (a) Dezimalrechnen:
    - bei Addition und Subtraktion nicht stellengerecht untereinander
    - bei Multiplikation 1x1- Fehler und Kommasetzung,vor allem,wenn Stellenzahl groesser als von Null verschiedene Ziffernanzahl
    - bei Division Kommasetzung
  (b) Brueche:
    - bei Addition nur Zaehler oder Nenner addiert oder nur Nenner "erweitert"
    - Verwechseln der Regeln (vor allem bei Multiplikation und Division chaotisch).
  (c) Allgemein:
    keine Ergebniskontrolle
(3) Vorschlaege:
  - Dezimalzahlen:Ordnen,Stellenwerte
  - Brueche:anstreben "automatisierter" Handlungsablaeufe.

TITELNUMMER: MP-6.0(18)

30 /Fractions/.
40 Hart,Kathleen(Hrsg.);
41 CSMS Mathematics Team;
52 /Children Understanding of Mathematics:11-16/,
London:Murray/1981/,S.66-81.
54 0-7195-3772-X;
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-8;

99 Teilbericht aus dem CSMS-Projekt (GB) zum Thema "Brueche".
Design: Text- und Diagrammaufgaben zu den wichtigsten Aspekten des Bruchrechnens werden 12-15jaehrigen Schuelern gestellt;am CSMS-Projekt waren ca.10.000 Schueler beteiligt.
Die Auswertung erfolgte nach Schwierigkeitsgraden,woraus Hierarchien und Leistungslevels ermittelt wurden.
Die Auswertung wurde durch Interviews unterstuetzt.

Ergebnisse:

(1) Textprobleme und Rechenaufgaben werden als 2 verschiedene Dinge aufgefasst.
(2) Der Schueler fuehlt sich beim Rechnen mit ganzen Zahlen sicher;bei Bruechen ist er unsicher.Er hat keine Quotientenvorstellung vom Bruch;Brueche sind fuer ihn oft auch einfach "2 Zahlen",mit denen man getrennt manipulieren kann.
(3) Es ergibt sich u.a.folgende Schwierigkeits-Hierarchie:

Bruch als Teil eines Ganzen, Erweitern mit 2, gleichnamige Brueche addieren	Erreichbar durch 75% der Schueler
Erweitern	Erreichbar durch 60% der Schueler
Addieren und Subtrahieren	Erreichbar durch 35% der Schueler
Multiplizieren und Dividieren	Erreichbar durch 10% der Schueler

/Investigations into the mathematical difficulties experienced by students and the reason for these difficulties/
MP-1.2(07)

/Klassifikationen nach Ähnlichkeit/
MP-5.0(12)

A /learning hierarchy for ratios and fractions/
MP-2.0(12)

Setzt man ein 2/3-Kriterium an,d.h.betrachtet
[illegible] 2/3 aller
Aufgaben richtig geloest sind,so sinken die
Erfolgsquoten rapide ab.

/Learning the concept of a function/
MP-4.0(07)

/Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben/
MP-5.0(11)

(4) mit zunehmendem Alter der Schueler verbessern
sich die Kenntnisse in der Bruchrechnung etwas,
aber nicht sehr signifikant.

/Lernvoraussetzung - Lernergebnis/
MP-4.0(06)

Der Beitrag beschreibt die wichtigsten Fehlerstrategien und gibt Hinweise fuer den Unterricht im Bruchrechnen.

/Lineare Funktion/
MP-3.0(03)

/Locating proper fractions on number lines/
MP-6.0(15)

/Locutions Inductrices et Destractrices: De Plus Que, De Moins Que/
MP-7.0(27)

/Lösungsstrategien bei Abzählproblemen/
MP-5.0(07)

/Mathematics Education Research on Curriculum and Instruction
MP-1.2(08)

/Mathematikunterricht./
MP-1.2(14)

Diesem Kapitel sind auch folgende Beiträge aus anderen Kapiteln zuzuordnen (das Schwergewicht der genannten Beiträge liegt jedoch in dem jeweils anderen Kapitel):

MP-1.2(14)

MP-2.0(12)

MP-2.0(20)

2.7 Dokumente zum Thema: Textaufgaben/Sachrechnen

(Zugeordnete Abschnitte im Heft "Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: Proportion" sind vor allem: 7.6, 9.6)

Die hier gesammelten Dokumente erschöpfen das Thema nicht vollständig, sondern nur seinen Bezug zur proportionalen Fragestellung.

Zur Information des Lesers sind aber typische Untersuchungen beigefügt, die die Umrisse des Themas insgesamt zeigen.

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 Autor(en), persönlich
21 Korporative Verfasser
30 Sachtitel
37 Hochschulschriftenvermerk
40 Bearbeiter, Übersetzer, Herausgeber
41 Korporative Herausgeber
50 Erscheinungsvermerke
51 Quellenangabe für Aufsätze in Periodika
52 Quellenangabe für Teile von Sammelwerken
53 Serien- bzw. Gesamttitel, ggf. mit Zählung
54 Internationale Standardbuchnummer (ISBN)
56 Sprachangaben (nicht bei Deutsch)
70 Gefälligkeitsübersetzung des Hauptsachtitels
71 Standort
74 Nummer in Mikrofilm-Sammlungen
99 Textreferat (Abstract)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

TITELNUMMER: MP-7.0(01)

20 Maier,Hermann;Schubert,Anton;
30 /Sachrechnen/.Empirische Befunde,didaktische Analysen,methodische Anregungen.
50 Muenchen:Ehrenwirth/1978/.125 S.
53 /Schulpaedagogische Aspekte./
54 3-431-02082-8;
71 MA-AA 10-1;

99 Design: - Loesen von Textaufgaben,die je eine bestimmte Variable (s.u.) variieren, andere festhalten
- Analyse ueber Verteilungsgroessen sowie Analyse von Loesungsprotokollen,z.T. auch teilnehmende Beobachtung
- Vergleich mit einschlaegiger(deutscher) Fehlerforschung

Population:einige hundert Grund- und Hauptschueler in verschiedenen Teilgruppen.

Ergebnisse:

(1) Verteilungsanalyse:
eine Textaufgabe ist umso leichter,je
- weniger komplex sie ist (d.h.weniger Simplexe oder diese in "linearem" Zusammenhang),
- weniger Brueche und Groessenumwandlungen vorkommen,
- bekannter die Situation ist,die der Text beschreibt
- expliziter die gestellte Frage ist
- klarer die Praesentation (grammatikalisch, stilistisch,grafisch)

Zu jeder dieser Variablen gibt Maier im Abschnitt D eine Aufgabenfolge an.

(2) Beschreibungsprozess:
- Schueler lesen Text meist 2-4mal durch

- es gibt "loesungsverhindernde Hinweise"
- in der Regel wird zu Beginn eine Strategie festgelegt
- Mit zunehmendem Alter werden vor dem syst. Rechnen Notizen auf ein Blatt gemacht.
- Keiner ueberprueft nachtraeglich ein Resultat.

(3) Folgerungen:

Aus (1) und (2) ergibt sich,dass Textrechnen

-> Bearbeitungshilfen benoetigt,und zwar
- formale, - verbale, - operationale,
- algebraische,- arithmetische

-> Notationshilfen benoetigt

Ausserdem sind die in (1) und (2) genannten Lerneigenschaften zu beruecksichtigen.

Das Buch gibt zahlreiche konkrete Hilfestellungen fuer das Sachrechnen.

TITELNUMMER: MP-7.0(02)

20 Maier,Hermann;
30 /Empirische Befunde zum Textrechnen/.
52 /Beitraege zum Mathematikunterricht/,Hannover:
Schroedel/1978/,S.186-188.
71 MA-AA 10-24;

99 Kurzbericht einer einschlaegigen empirischen
Untersuchung.Sie ist ausfuehrlich dargestellt in:
MAIER/SCHUBERT,Sachrechnen,Muenchen 1978
(Titelnummer:MP-7.0(01)).

TITELNUMMER: MP-7.0(03)

30 /Sachrechnen/.Didaktische Materialien fuer die Hauptschule.
40 Vollrath,H.-J.(Hrsg.);
50 Stuttgart:Klett/1980/.
71 Archiv;

99 Didaktische Analysen,empirische Erfahrungswerte und unterrichtspraktische Beispiele zum Themenkreis "Sachrechnen".

TITELNUMMER: MP-7.0(04)

30 /Applied mathematical problem solving/.
40 Lesh,Richard(Hrsg.);Mierkiewicz,Diane(Hrsg.);
Kantowski,Mary(Hrsg.);
41 ERIC Clearinghouse for Science,Mathematics and
Environmental Education(Ohio);University(Ohio);
50 Ohio:University/1979/.257 S.
53 /Mathematics Education Reports./
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-30;

9? Wichtiger Sammelband mit Darstellung des Forschungsstandes bis etwa 1979 im Bereich Sachrechnen/Textprobleme (vor allem angelsaechsische Laender). Der Band stellt einzelne Forschungsvorhaben dar und gibt ausserdem Hinweise auf noch zu erforschende Bereiche.

TITELNUMMER: MP-7.0(05)

20 Suydam,Marilyn N.;Osborne,Alan;
30 /Algorithmic Learning/.
40 Suydam,Marilyn N.(Hrsg.);Osborne,Alan R.(Hrsg.);
41 ERIC Science,Mathematics and Environmental Education Clearinghouse(Ohio);University(Ohio);
50 Ohio:University/1977/.197 S.
53 /Mathematics Education Reports./
56 pres.:engl.;
71 MA-AL 10-21;

99 Sammelband zum Forschungsstand im Bereich algorithmischen Lernens.
Einge auch fuer das Sachrechnen/Textaufgaben wichtige Ergebnisse:
(1) Schueler sollen bei Problemen eigene Algorithmen entwickeln (duerfen) und diese miteinander vergleichen.
(2) Die Sequenz von Algorithmen zur Problemloesung wird besser vom Schueler selbst erzeugt als vom Lehrer.Daher ist die Frage:"was braeuchten wir, um....zu tun?" besser als:"das ist nun zu tun".
Auf diese Weise entsteht auch ein Einblick in den Aufbau eines Gegenstandes oder Gebiets fuer den Schueler.
(Lernprogramme unterbrechen oft diese Selbst-Sequenzierungen).
Der Band enthaelt auch Aussagen zu dem Bereich Bruchrechnen,siehe Titelnummer:MP-6.0(14).

TITELNUMMER: MP-7.0(06)

20 Andelfinger,Bernhard;
30 /Sachrechnen-Mathematik,Folklore oder was sonst/?
Auswertung einer Leser-Anfrage.
50 /MM-Journal/,/1981/31,S.1-2.
71 MA-AA 00-74;

99 Auswertung einer Leserumfrage (Lehrer) zum
Problem des Sachrechnens.
Die Fragestellung geschah in Nr.28/April 1980
des MM-Journals (der Auswertung im Archiv beigefuegt).

Einige Ergebnisse:

(1) Sachaufgaben werden fuer notwendig erachtet, aber koennen nicht alleiniges Ziel des Mathematikunterrichts sein.
(2) Sachaufgaben sollen nicht "verkleidete Mathematik" sein.
(3) Sachaufgaben brauchen einen eigenen Raum im Mathematikunterricht;sie koennen nicht nebenbei erledigt werden.
(4) Die Merkmale einer "guten" Sachaufgabe sind vor allem
- Offenheit
- Redundanz
- Vielfalt der Variablen und Relationen
- Interesse wecken.

TITELNUMMER: MP-7.0(07)

20 Birnbaum,P.;
30 /Zum selbstaendigen Finden von Loesungsansaetzen fuer Sach- und Anwendungsaufgaben. 2/.
51 /Mathematik in der Schule/,/1981/2-3,S.133-141.
71 Archiv;

99 Birnbaum weist darauf hin,dass Schueler bei Textaufgaben u.a.folgende Verhaltensweisen zeigen:
(1) Sie loesen die Aufgabe vordergruendig unreflektiert nach einem "Standardreiz".

Beispiel:
Ist es moeglich,eine rechteckige Platte 2,35 x 4,7m durch eine 2,20m hohe und 0,95m breite Tuer zu transportieren?
Antwort:NEIN,denn F (Platte) > F (Tuer)

(2) Sie stehen vor dem Problem,aus den vielen zur Verfuegung stehenden math. Verfahren das passende Verfahren auszuwaehlen.

Es wird vorgeschlagen,zuerst die Textaufgaben inhaltlich einzuordnen.

TITELNUMMER: MP-7.0(08)

20 Keuthen,B.;Pechner,U.;
30 /Problemloesestrategien von Schuelern/.Treffpunkt Autobahn um Mitternacht.
50 Moenchengladbach:Bezirksseminar/1981/.11 S.
71 MA-AA 31-7;

99 Design:Schuelern wird eine Begegnungsaufgabe gestellt,die Loesungsstrategie wird nicht vorgeschrieben.
Die Aufgabe verlangt das Arbeiten mit zusaetzlichen Hilfsmitteln(Atlas).
Am Versuch waren 30 Schueler (Kl.8) in 5 Gruppen beteiligt.
Das Vorgehen der Gruppen wurde von neutralen (z.T.auch teilnehmenden) Beobachtern protokolliert;die Schueler fertigten selbst ein Rechenprotokoll.

Ergebnisse:

(1) Es ueberwogen probierende Verfahren,haeufig mit algorithmisch-iterativem Charakter.
(2) Verfahren des Schlussrechnens wurden haeufig eingesetzt,ebenso experimentelle Verfahren (Abmessen von Strecken auf der Karte mit einer Schnur).

TITELNUMMER: MP-7.0(09)

20 Strehl,R.;
30 /Grundprobleme des Sachrechnens/.
50 Freiburg:Herder/1980/.256 S.
71 Math 102;

99 Umfassende Analyse und Darstellung didaktischer und methodischer Aspekte des Sachrechnens.
U.a.gibt Strehl an,dass bei Sachproblemen,die den Uebergang vom Simplex zum Komplex verlangen, bei Hauptschuelern ein sprunghaftes Ansteigen der Fehlerquote beobachtet wird.
Weiter wird beobachtet,dass abgeleitete Groessen (z.B.km/h) von den Schuelern wie "selbstaendige" Groessen behandelt werden.
Schliesslich wird erwaehnt,dass das Erkennen einer Divisionsstrategie im Sachrechnen besonders schwierig ist.

TITELNUMMER: MP-7.0(10)

36 /Statistics in your world/.
Statistikunterricht fuer 11-16jaehrige Schueler.
41 Schools Council Projekt on Statistical Education;
50 Slough:Foulsham/1980/.Getr.Zaehlg.
54 0-572-01064-8;
56 pres.:engl.;
71 MA-AM 31-1;MA-AM 31-2a-2h;
MA-AM 31-3a-3h;

99 Sammlung von Schueler- und Lehrerheften fuer den Statistikunterricht in der Sekundarstufe I. Die Reihe stellt kein Curriculum dar,sondern eine Sammlung interessanter statistischer Probleme und kleiner Projekte,die immer wieder eingebaut werden koennen.

TITELNUMMER: MP-7.0(11)

20 Cook,Blair;
30 An /Analysis of Arithmetic,Linguistic,and Algebraic Structural Variables That Contribute to Problem Solving Difficulty in Algebra Word Problems/.
50 New Orleans:/American Educational Research Association/1973/.17 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AL 10-10;
74 ERIC,ED 076433;

99 Design:26 Strukturvariable wurden an einer Gruppe von algebraischen Textaufgaben definiert. Die Textaufgaben wurden an 96 College-Studenten (USA) erprobt. Es wurde untersucht,welche dieser Variablen die hauptsaechliche Varianzaufklaerung der Loesungswahrscheinlichkeiten bringen.

Ergebnisse:

Es ergeben sich 6 hauptsaechlich relevante Variable:
- Anzahl der Worte im laengsten Satz
- logischer Zusammenhang der Unbekannten
- Erinnerung an Formeln (Muster)
- Anzahl der Ziffern in Quotienten
- Anzahl der Wortumstellungen im Satz
- Typ der arithmetischen Operationen.

TITELNUMMER: MP-7.0(12)

20 Segalla,Angelo;
30 /Using Structural Variables to Predit Word/. Problem Solving Difficulty for Junior College Arithmetic Students.
50 New Orleans:American Educational Research Association/1973/.115 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-18;
74 ERIC,ED 076431;

90 Eine Untersuchung von Loesungsschwierigkeiten bei Textaufgaben an ca.170 College-Schuelern (Junior-College).
Es zeigt Sich,dass das "Sich-Erinnern an Formeln/ Muster" bis zu 47% der Varianz der Loesungs-wahrscheinlichkeit erklaerte.(vgl.auch COOK,1973, Titelnummer:MP-7.0(11)).

TITELNUMMER: MP-7.0(13)

20 King,Irv;
30 /Ikonic and Symbolic Representation/.A Study of Mathematical Reasoning.
50 Washington:Department of Health Education and Welfare/1973/.14 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-17;
74 ERIC,ED 076434;

99 Design:Schueler der K1.5-8 (USA) werden einem Verstaendnistest unterzogen,der hoch mit math.Leistung korreliert.
Der Test wurde in ikonische und symbolische Form umgeschrieben.

Ergebnisse:

(1) Die ikonische Form ist leichter als die symbolische Form,vor allem fuer schwaechere Schueler.
(2) Mit der math.Leistung korreliert die symbolische Form nicht hoeher als die ikonische Form.

TITELNUMMER: MP-7.0(14)

20 Meyer,Ruth Ann;
30 A /Comparison of the Intellectual Abilities of Good and Poor Problem Solvers/.An Exploratory Study.
50 Michigan:Univ./1980/.35 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-22;
74 ERIC,ED 188909;

99 Design:Schueler des 4.Schuljahres wurden in zwei Gruppen eingeteilt:gute und schlechte "Problemloeser";daraus wurde eine Stichprobe gebildet.Der vorgelegte Test beinhaltete Elemente zur verbalen Faehigkeit, Einfuehrungsabhaengigkeit,Zahlenverstaendnis,Redefluss,Gedaechtnis,raeumlichen Darstellung,Wahrnehmungsgeschwindigkeit.

Ergebnisse:

Denkfaehigkeit allgemein,verbale Faehigkeit und Zahlenverstaendnis korrelieren hoch mit der mathematischen Problemloesungsfaehigkeit.Die wichtigste Rolle spielt hierbei das schlussfolgende Denken (die 19 Tests trennten die guten und schlechten "Problemloeser" mit einer Uebereinstimmung von 92,2%).

TITELNUMMER: MP-7.0(15)

30 /Children's Strategies of Solving Verbal Problems/. Final Report.
40 Zweng,Marilyn J.(Mitarb.);Geraghty,Jean(Mitarb.); Turner,Jonathan(Mitarb.);
50 Washington:National Inst.of Education/1979/.108 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-21;
74 ERIC,ED 178359;

99 In dieser Arbeit werden die Bedingungen benannt, die Grundschuelern den Zugang zu verbalen Problemstellungen erleichtern.Wichtig sind in diesem Zusammenhang:Beifuegungen zum Problem,benutztes Handwerkzeug (Methoden,sonstige Hilfestellungen), und ferner die moegliche Uebertragbarkeit des Problems.
Zusammengefasst in 29 Aussagen sind die Ergebnisse vier Ueberschriften zuzuordnen:
1) Problemschwierigkeit
2) Wirksamkeit von Hinweisen
3) Taschenrechnergebrauch
4) Sonstige Gruende.

TITELNUMMER: MP-7.0(16)

20 Mayer,Richard E.;Grieno,James,G.;
30 /Restructuring of Meaningful Information in Problem Solving/.
50 Washington:Department of Health Education and Welfare/1974/.9 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-19;
74 ERIC,ED 108961;

99 An College-Studenten wurde festgestellt,dass Schueler sich Problemloesungen und Formeln haeufig in Wortform (z.B. "Laenge mal Breite") bereitstellen und auch so verarbeiten.
Bei symbolischen (formalen) Fragestellungen fallen sie auf das durch den Lehrer gelehrte Wissen zurueck und versuchen,auch symbolisch die Frage zu loesen.
Dabei treten grosse Zeitverluste und auch Fehler auf.

TITELNUMMER: MP-7.0(17)

20 Knifong,J.Dan;Holtan,Boyl,D.;
30 A /Search for Reading Difficulties Among Erred Word Problems/.
50 Washington:Department of Health Education and Welfare/1976/.19 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-16;
74 ERIC,ED 134464;

99 Design:35 Schueler (K1.6,USA),bei denen Leseschwierigkeiten als Fehlerursache von Textproblemen vermutet wurden,wurden speziell untersucht.Sie sollten den Text laut vorlesen und dann erklaeren.

Ergebnisse:

(1) Die Schueler verstanden i.A. den Text,die damit verbundene Situation und das Problem, auch wenn sie dann mathematisch nichts(oder Falsches)taten.
(2) Es wurde praktisch keine Signifikanz der Lesefertigkeit fuer das Erklaeren der Loesungsschwierigkeiten bei Textproblemen gefunden.

TITELNUMMER: MP-7.0(18)

20 Silver,Edward A.;
30 /Student Classification of Mathematical Word Problems/.Bases for Classification and Relationsships to Problem-Solving and other Abilities.
50 New York:American Educational Research Association /1977/.12 S.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 10-20;
74 ERIC,ED 139660;

90 Design:Schueler,die noch keine Algebra hatten, sollten eine Menge von Textaufgaben unter dem Gesichtspunkt "aehnlich" sortieren.

Ergebnisse:

Die Schueler betrachten Textaufgaben als "aehnlich", wenn
- Details des Kontexts uebereinstimmten
- die Frageform verwandt war
- Pseudostrukturen uebereinstimmten (z.B.Alter, Gewicht).

Nur math.begabte Schueler betrachten Textaufgaben als aehnlich,wenn ihre math.Struktur gleich war.

TITELNUMMER: MP-7.0(19)

20 Richard,J.F.
30 Les /contraintes de fonctionnement des systemes mnesiques dans la resolution des problemes/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble: Equeipe de Recharche Pedagogique/1981/,S.232-236.
56 pres.:franz.;
71 MA-AA 00-45;

99 Design: Loesen einer Folge von additiven Gleichungen mit einer Unbekannten;die Resultate bauen aufeinander auf,es gibt aber auch noch (z.T.unnoetige) Zusatzinformationen. 10-11jaehrige Schueler.

Ergebnisse:

(1) Wenn ein Resultat fehlerfrei erreicht wird, werden die vorangehenden Informationen/Resultate z.T.vergessen und zwar umso mehr,je mehr Rechenschritte zum Endresultat noetig waren.
(2) Es gibt bei den beobachteten Schuelern keinen wirksamen Selektionsmechanismus,der unnuetze Informationen von weiterhin nuetzlichen sicher trennt und dies im Gedaechtnis markiert.

TITELNUMMER: MP-7.0(20)

20 Lesh,Richard;
30 /Processes needed by average ability middle school children in the solution of "real world" mathematics problems/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Grenoble: Equipe de Recherche Pedagoque/1981/,S.133-139.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-45;

99 Der Aufsatz beschaeftigt sich mit der Beschreibung von Zielen und Inhalten des APS-Projekts (Applied Problem Solving).
APS betrachtet Probleme als bedeutungsvolle Situationen,die ein Schueler zu untersuchen bereit ist und fuer die eine Modellkonzeption noch nicht vorhanden ist.
Eine Modellkonzeption (conceptual model) ist eine Vorstellung,die eine zentrale Idee,ein Repraesentationssystem und ein Prozess-System fuer diese Idee beinhaltet.
Als Resultat dieser Ueberlegungen wird formuliert: Probleme im o.g.Sinne erfordern im Unterricht erst eine Erkundung des Problemfeldes und die Gewinnung einer Modellkonzeption,nicht als erstes das "Loesen des Problems".

TITELNUMMER: MP-7.0(21)

20 De Corte,Erik;Somers,Ralf;
30 /Analysis and improvement of sixth-graders ability to solve word problems/.
52 /Psychology of Mathematics education/,Genoble: Equipe de Recherche Pedagogique/1981/,S.302-307.
71 MA-AA 00-45;

99 Untersucht wurden die Wirkungen verschiedener Lehrstrategien von Textaufgaben bei Schuelern der 6./7.Klasse.

Ergebnisse:

(1) Bei den Schuelern wurde ein Anstieg der Erfolgsquote von 47% auf 71% beobachtet,wenn fuer Textaufgaben folgende Lehrstrategie verfolgt wurde:
(1) Lese die Aufgabe
(2) Schaetze die Loesung
(3) Loese die Aufgabe
(4) Bestaetige Deine Loesung
(5) Schreibe die Loesung auf.
(2) Zu Schritt (1) -(3) (oder auch (1)-(5)) empfehlen andere Forscher (Balacheff,Brun: gleicher Band,Seite 278-289) vor allem interaktive und kommunikative Situationen.Diese Situationen rufen eigene Umformulierungen des Problems durch die Schueler hervor,welche ihrerseits durch das Problem erzeugt werden,wie es die Schueler sehen.

TITELNUMMER: MP-7.0(22)

20 Walther,Gerd;
30 /Autonomous learning and the reading of mathematical texts/.
51 /Journal fuer Mathematik Didaktik/1981/2, S.147-177.
71 Archiv;

99 2 Hauptfragen:
(1) Wie lesen Studenten math.Texte?
(2) Wie sollte man math.Texte lesen?
Ad(1): Beobachtung von 28 Studenten (PH Dortmund)
Ergebnisse:
a) Schwierigkeiten mit der Textstruktur:
- Detailfixierung
- Linear-sequentielles Lesen
- Gleichgewichtung aller Textelemente
b) Semiotische Schwierigkeiten durch
- Repraesentationsformen im Text
- vorfixierte Interpretationsformen und Vorwissen des Lesers
c) Schwierigkeit,sich den Text in eigenen Worten klar zu machen.
Ad(2):(a) Orientierung am Text (Inhalt,Aufbau)
(b) Beziehung zwischen Text und bereits vorhandenem Wissen herstellen
(c) Einen Rahmen fuer den Text finden und ein Geruest (Gliederung,Akzentuierung etc.) bilden.
(d) den Text konkret machen
(e) Evtl.die Repraesentationsform aendern
(f) Abschliessend den Text reflektieren (im Blick auf die eigenen Erwartungen,Verallgemeinerungen usw.)

TITELNUMMER: MP-7.0(23)

20 Nelson,Doyal;
30 A /Trend in Problem Sohing Research/.
50 Ohio:ERIC/1979/.
71 Archiv;

99 Design: Forschungsbericht

Ergebnisse(ausgewaehlt):

(1) Charakteristika "guter" Probleme nach Liedke/ Vance (1978):
- open ended
- can be interpreted in different ways
- several procedures possible
- more than one solution exists
- maximum involvement of pupils, minimum teacher direction
- leding to further problems
- can be interpreted into other areas of study.

(2) "good" problems nach Nelson/Kirkpatrick (1975):
- demonstrable significance mathematically
- a situation involning real objects or simulations of real objects
- interesting to the child
- requiring the child to make some modifications or transformations in the materials used
- allowing for different levels of solution
- many physical unbodiments
- the child should believe the problem can be solved and should indicate when a solution has been reached

(3) Auszuege aus Studie von Nelson/Kieren (1978) zum Verstaendnis von rationalen Operatoren bei Kindern und Jugendlichen:

- Neigung,die 1/2-Maschine anzuwenden,auch wenn man weiss,dass es nicht stimmt;
- Neigung,die eigene Antwort zu rechtfertigen, auch durch voellig unzureichende Argumentationen.

(4) Umgang mit realen Problemen:

- "Ablenkbarkeit" ist ein Schluesselverhalten: auf "irrelavante" Einzeldaten,auf die eigene Meinung etc.
- in relevante praktische Probleme lassen sich anspruchsvollere math.Probleme besser einpacken als in formal-symbolische Form
- Bei Wortproblemen suchen Schueler nur nach Formeln etc.Das entfaellt bei realen Problemen, wo sie beginnen,Loesungen zu suchen.
- "Ablenkung" wird nicht durch Kouplexitaet der Aufgabe beeinflusst,vielmehr durch die eigene Faehigkeit,"andere" Alternativen zu dem Problem oder der Problemloesung selbst zu erdenken bzw.daran interessiert zu sein.

(Original nicht in unseren Bibliotheksbestaenden.)

TITELNUMMER: MP-7.0(24)

20 Frey,Herbert;
30 /Moderne Mathematik zur Entwicklung der math.u. intellektuellen Leistungsfaehigkeit/.
37 Mainz;Univ.;Phil.Fak.;Dissertation,1975;
40 Ewert,O.(Hrsg.);Froehlich,W.D.(Hrsg.);
41 Universitaet(Bielefeld).Institut fuer Didaktik der Mathematik;
52 /Dokumentation deutschsprachiger Dissertationen und Habilitationen zur Mathematikdidaktik/, Bielefeld:/IDM/1979/,S.28.
53 /Schriftenreihe des Instituts fuer Didaktik der Mathematik.21/
71 Math 1012;

99 Design:
a) Ansatz: Vergleich von Schuelerleistungen bei herkoemmlichem und modernem Math.unterricht u.versch.Unterrichtsformen.
b) Basis: Testpaarlinge 1.,2.,5.,6. u.7.Schuljahr
c) Methode:Tests:"herkoemmlich" vs."modern" gefuehrter Mathematikunterricht.

Ergebnisse:

(1) bei sachisolierten Rechentechniken: herkoemmlicher Mathematikunterricht besser
(2) bei sachadaequaten Rechenoperationen (Textaufg.im Schlussrechnen und in der Geometrie): moderner Mathematikunterricht besser
(3) bei arithm.Inhalten:frontaler Unterricht fuer alle Schueler besser
(4) bei mengentheoret. Inhalten: Unterrichtsform fuer bessere Schueler egal; fuer schwaechere Schueler ist Gruppen- und Einzelarbeit besser.
(Original nicht in unseren Bibliotheksbestaenden)

TITELNUMMER: MP-7.0(25)

20 Clemens,M.A.K.;
30 /Analyzing childrens errors on written mathematical tasks/.
51 /Educational Studies in Mathematics/,11/1980/1, S.1-21.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-79;

99 Design:Interviews,Fehleranalysen,Strategieanalysen bei Schuelern des 5.-7.Schuljahrs(Australien).

Ergebnisse:

(1) Interaktion zwischen "question variables" (Vokabular,Syntax,Komplexitaet und Level math.Ideen in der Frage) und "personal variables" (persoenl.Faehigkeiten allg.) entscheidend fuer Bearbeitung von Aufgaben mit geg.Fragen.
(2) Mit dem Alter nimmt die Loesefaehigkeit zu, aber Fluechtigkeitsfehler und Motivationsprobleme auch.
(3) Bei Bruechen sind konkrete Aufgaben oft leichter als abstrakte (1 - 1/4 schwerer als "ein Kuchenstueck wegnehmen"),Stammbrueche leichter als Nicht-Stammbrueche,"3/4 von...." fast unmoeglich.
(4) Vorschlag:im Unterricht nicht Schuelern zeigen, wie es geht,sondern zuerst Frage lesen,analysieren,Strategie suchen.

TITELNUMMER: MP-7.0(26)

20 Caldwell,Janet H.;Goldin,Gerald A.;
30 /Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics/.
51 /Journal for Research in Mathematics Education/,10 /1979/5,S.323-336.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 00-80;

99 Design:normale "Sachaufgaben" und entsprechende algebr.Textaufgaben (nur als "Zahlenraetsel"),wobei die beiden Aufgabentypen je in einer factual-Version (Tatsachen) und eine hypothetical-Version ("nimm an,...") vorgelegt werden.
Untersucht wurden Kinder von 8-12 Jahren. (USA,1976).

Ergebnisse:

(1) Je hoeher das Alter,um so mehr Aufgaben werden geloest.
(2) Maedchen bei "Zahlenraetseln" besser als Jungen.
(3) Die hypothetischen Aufgabenstellungen werden "math." besser geloest,vor allem bei den Zahlenraetseln.
(4) Die (konkreten) Sachaufgaben werden besser geloest als die Zahlenraetsel.

TITELNUMMER: MP-7.0(27)

20 Sueur,M.;Lamarche,J.-P.;Marthe,P.;
30 /Locutions Inductrices et Destractrices:De Plus Que,De Moins Que/.
51 /Educational Studies in Mathematics/,10/1979/4, S.421-434.
56 pres.:franz.;
71 MA-AL 10-9;

99 Design:16 Fragebogen mit 4 x 4 Textaufgaben, wobei immer die Reizwoerter "mehr als" "weniger als" vorkommen,aber der Kontext wechselt.
Zwischen den Fragebogen wechseln Anordnung, Fragestellung und die den Reizworten damit zugeordnete Rechenoperation + oder - sowie der Kontext;ca.800 Schueler,10-12 Jahre. (Frankreich).

Ergebnisse:

(1) Die Reizworte rufen bestimmte Operationen hervor (mehr als -> +, weniger als -> -),alle anderen Variablen sind unbedeutend.
(2) Die Schueler wollen mit einer Rechnung zu Ende kommen.

Vorschlaege fuer den Unterricht
(1) "Reiche Situationen" anstelle von "Problemtyp-Aufgaben",in denen erst mal eine Analyse der richtigen Relationen vorgenommen werden muss.
(2) Die Aufgaben so waehlen,dass sie nicht mit einer Rechnung erledigt werden koennen.
(3) "Offene Aufgaben",zunaechst ohne Fragen.

TITELNUMMER: MP-7.0(28)

20 Nesher,Perla;Teubal,Eva;
30 /Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving/.
51 /Educational Studies in Mathematics/,6/1975/ S.41-51.
56 pres.:engl.;
71 MA-AL 10-8;

99 Design:Es werden beim Loesen von Textaufgaben die Probleme untersucht,welche beim Uebergang von der "natuerlichen Sprache" zum entsprechenden arithmetischen Ausdruck entstehen.
Dazu werden Schuelern Textaufgaben gestellt, die mathematisch dieselbe Struktur (Addition/Subtraktion) darstellen,aber sprachlich verschieden gefasst sind.
An den Untersuchungen waren etwa 400 Schueler (Kl.5/6) beteiligt (Israel).

Ergebnisse:

(1) Die Wahl der Addition ueberwiegt,wenn der Text "neutral" wirkt.
(2) Wenn "cues" vorkommen,so wirken diese bestimmend ("Kaufen" -> Trend zu Addition;"verlieren" -> Trend zur Subtraktion).
(3) Wenn die "cues" im erkennbaren Widerspruch zur mathematischen Absicht der Aufgabe stehen, wirken die Schueler verunsichert und versuchen abzuschaetzen,welcher Aspekt der vorrangigere ist.
(4) Die Untersuchung zeigt,dass ein direkter Uebergang vom Text zum mathematischen Loesungsausdruck i.A.nicht moeglich ist.
Die im Text verborgenen (math.) Beziehungen muessen zuvor erkannt und reflektiert werden.

TITELNUMMER: MP-7.0(29)

20 Seidel,Gertrud S.;
30 Der /Einfluss der sprachlichen Formulierung von Rechenaufgaben auf die Loesungswahrscheinlichkeit/.
51 /Zeitschrift fuer Empirische Paedagogik/,2/1978/3, S.192-211.
71 MA-AA 10-15;

99 Design:
3 Aufgabentypen:
Op (reine Rechnungen)
eT (einfache Texte:Kurz,wenig irrelevante Informationen,vorwiegend auf die Fragestellung bezogene "Signalwoerter" = cues)
sT (schwere Texte:laenger,irrelevante Informationen,viele - auch nicht fragebezogene - cues)
Untersucht wurden 450 Schueler des 4.Schuljahres.

Ergebnisse:

(1) Art	Op	eT	sT
+	.83	.80	.62
-	.79	.70	.56
.	.69	.58	.47
:	.62	.52	.41

Es wird also obige hierarchische Gliederung bestaetigt.(Die Zahlen bedeuten Schwierigkeitsgrade)
(2) Schichtenspezifische Unterschiede
(3) Saetze werden relativ global aufgenommen; einige Sprachbausteine uebernehmen eine wesentliche Steuerfunktion zur Bedeutungserfassung. Daher auch eT nicht immer "einfache".
(4) Additionsstrategien stark bevorzugt (schon durch "und","bekommen","insgesamt" etc.!)
(5) Der Gehalt an irrelevanten Informationen beeinflusst die "Schwere" der Aufgabe.

TITELNUMMER: MP-7.0(30)

20 Rupley,William;
30 The /Effects of Numerical Characteristics on the Difficulty of Proportion Problems/.
51 /Abstracts of Short Communications/,/1980/4, S.83.
71 Archiv;

99 Design: - Proportionale Textaufgaben (Schlussrechnung) fuer low achievers 7th,9th, 11th grade;San Francisco Bay area
- Definition von 3 Variablen als numerische Charakteristik der Textaufgaben; lineare Regression.

Ergebnisse:

(1) Die 3 Variablen
- Teilbarkeit der vorkommenden Groessen
- Ordnung
- Groesse der Zahlen und "complexity" ihrer Verhaeltnisse

erklaeren gut.

(2) 7th grade students:
Teilbarkeit ist entscheidend fuer die Schwierigkeit einer Textaufgabe (Bruch-Vermeidbar keit)

9th grade students:
Groesse der Zahlen und Komplexitaet der Verhaeltnisse entscheidend

(3) Strategien:
- Grundreaktion ist der "Augenschein": Kommen Brueche vor oder nicht?
- Grundstrategie ist "Teilen-Malnehmen".
- 7th grade geht i.A. nicht ueber die Einheitsgroesse,ab 9th grade wird der Weg ueber die Einheitsgroesse bevorzugt.

- bei komplexeren Verhaeltnissen wird die Einheitsgroessen-Strategie bevorzugt.

(4) Entwicklung:
vom 7th grade -> 9th grade grosse Fortschritte in einfachen Faellen;schwierige Faelle werden erst ab 9th grade besser geloest.

(5) Vorschlaege fuer low achiever:
7th grade (1) "Ganze Zahlen-" Probleme und entsprechende Strategien
9th grade (2) Einheitsgroessen-Strategien
9th grade (3) Advanced strategies (z.B.Propotionalgleichungen)

(Original nicht in unseren Bibliotheksbestaenden.)

TITELNUMMER: MP-7.0(31)

20 Geisert,Paul George;
30 A /study of the hierarchical competencies underlying the problem-solving use of proportion/.
50 Ann Arbor:Univ./1971/.186 S.
71 Dok 7635;

99 Design:60 Schueler,6th grade,IQ zwischen 134 und 67,wurden nach curricularem Material unterrichtet,das gemaess einer Lernhierarchie konstruiert wurde,welche aus vorhandenen Forschungen zum problemloesenden prop. Denken entwickelt wurde.
Durch Vortest-Nachtest-Vergleich wird Validitaet der Lernhierachie,Lernerfolg usw.gemessen.
Durch Vergleich mit einer gleichstarken Kontrollgruppe werden zusaetzliche Informationen hierzu gewonnen.

Ergebnisse:

(1) Das hierarchisch angelegte Material wurde von allen Schuelern erfasst,allerdings nur,weil individuell angepasste Lerngelegenheiten vorhanden waren.
(2) Zwischen der auf das Material bezogenen Leistungsfaehigkeit der Schueler und allg.Leistungsfaehigkeit (z.B.IQ) gibt es kaum Korrelationen.
(3) Um das erworbene Wissen auf anders gelagerte Probleme zu transferieren reicht (bei prop. Problemen) der Erwerb hierarchisch geordneten Wissens nicht aus und ist z.T.auch gar nicht notwendig.

Hinweis: die Arbeit gibt (in Form der Hierarchietabellen) gute Hinweise fuer unterrichtliche Ablaeufe im Bereich prop.Problemloesens.

TITELNUMMER: MP-7.0(32)

20 Hart,Kathleen;
30 The /Understanding of Ratio in the Secondary School/.
51 /Mathematics in School/,7/1978/Jan.;S.4-6.
56 pres.:engl.;
71 MA-AA 11-16;

99 Der Artikel beschreibt typische Loesungsstrategien proportionalar Textaufgaben bei Schuelern der Sekundarstufe I (GB).
Zum Versuchshintergrund vgl.die einschlaegigen Veroeffentlichungen von K.Hart,insbes.zum CSMS-Projekt (Titelnummer:MP-1.2(10)).
Es wird darauf hingewiesen,wie stark gerade die Additionsstrategien bei prop.Textproblemen sind.

TITELNUMMER: MP-7.0(33)

20 Dahlgren,Lars Owe;Maston,Ference;
30 /Students' Conceptions of Subject Matter/.
An aspect of learning and teaching in higher education.
51 /Studies in Higher Education/,3/1978/1,S.25-35.
71 2.2.28;4.4.3 Hochschule;

99 Design:7 grundlegende oekonomische Fragen zu "basic economic concepts" und "everyday economic phenomena" wurden ca.20 Studenten (Anfangssemester) in Schweden vor und nach einem entsprechenden Kurs vorgelegt.
Die Antworten wurden ausgewertet und kategorisiert.

Ergebnisse:

(1) Es treten 2 Verstaendnistypen auf:

relatives Verstaendnis	absolutes Verstaendnis
z.B.:Preis ist Ergebnis von Angebot und Nachfrage	z.B.:Preis ist ausschliesslich Eigenschaft des Objekts

(2) Es ist unguenstig,dass wirtschaftl.Probleme in der Schule entweder gar nicht oder dann sehr kompliziert behandelt werden.
(3) Forderung:
im Unterricht an einfachen wirtschaftliche Fragen das "basic network of ideas" klarlegen. Lieber weniger Stoff,aber diesen von den Grundkonzepten her behandeln.Nur so laesst sich "relatives" Verstaendnis foerdern.

TITELNUMMER: MP-7.0(34)

20 Damerow,Peter;
30 /Wieviel Mathematik braucht ein Hauptschueler/?
51 /Neue Sammlung/,20/1980/5,S.513-529.
71 MA-AA 10-14;

49 (1) Didaktisch-bildungspolitische Analyse der Hauptschulmathematik,historische Entwicklung.
(2) Folgende Anforderungen an Sachrechnen:
- Interpretation mathematischer Informationen
- Abschaetzen der Voraussetzungen und Folgen der Anwendung math.Methoden
- Finden vereinfachender Fragestellungen und impliziter Probleme,die an einer geg.Problemstellung moeglich/sinnvoll sind
- Kooperation verschiedener Methoden und Faecher an einem Problem (fachuebergreifend).

TITELNUMMER: MP-7.0(35)

30 Bibliographische Hinweisen zu:
/Unterrichtsversuche zum Bereich Sachrechnen,Textaufgaben/.
41 Landesinstitut Schleswig-Holstein fuer Praxis und Theorie der Schule(Kiel);
50 Kiel:IPTS/1981/.4 S.
71 MA-AL 00-8;

99 Die im folgenden zusammengestellten Arbeiten koennen entliehen werden bei:
Landesinstitut Schleswig Holstein fuer Praxis und Theorie der Schule
Zentralstelle fuer Information und Arbeitsplanung
Schreberweg 5
2300 Kronshagen

Verfasser	Titel der Arbeit
Kunkel,Erich	Problemorientierte Behandlung von Sachaufgaben in der Orientierungsstufe Kl.5
Bartels,Jutta	Strukturierung von Textaufgaen in einer 5.Klasse A-Kurs
Petermann,Rainer	Textaufgaben in der Gleichungslehre der Untertertia
Sparrer,Richard	Zeitgemaesse,allgemeinbildende mathematische Textaufgaben in der 6.Jahrgangsstufe im Zusammenhang mit dem Curricularen Lehrplan eroertert und an Unterrichtsentwuerfen dargestellt.

TITELNUMMER: MP-7.0(36)

20 Kroll,Wolfgang;
30 Eine /Methode zum Auffinden des Ansatzes bei sogenannten Textaufgaben/.
51 /Praxis der Mathematik/,22/1980/11,S.325-335.
71 MA-AL 10-12;

99 Aufgrund von Erfahrungswerten plaediert der Verfasser fuer folgende Handlungsanweisung zum Auffinden des Ansatzes bei Textaufgaben:

Waehle fuer die gesuchte Unbekannte willkuerlich eine Zahl.Fuehre mit dieser die im Text angedeuteten Rechnungen durch.Pruefe,ob alle Bedingungen erfuellt sind.

(1) Wennn ja,dann hast du eine Loesung gefunden.
(2) Wenn nein,setze fuer die Zahl eine Variable ein,fuehre mit dieser genau dieselben Rechnungen durch und setze zum Schluss die im Beispielfall nicht erfuellte Bedingung zwangsweise an (Ansatz).
(3) Verfahre auch im Fall (1) wie im Fall (2),damit du wirklich alle Loesungen des Problems erhaelst.

Hinweis:Wenn du dich sicher fuehlst,kannst du auch von Anfang an mit einer Variablen arbeiten.

TITELNUMMER: MP-7.0(37)

20 Borges,Rudolf;
30 /Hilfen fuer die Wahl der Variablen beim Loesen von Textaufgaben/.Vortrag auf der Hessischen Landesversammlung der MNU am 30.9.1981 in Giessen.
50 Giessen:Hessische Landesversammlung/1981/.17 S.
71 MA-AL 10-7;

99 Anhand von Fallstudien plaediert der Verfasser fuer folgende Vorgehensweise bei der Loesung von Textaufgaben (Schueler-Arbeitsanweisung):
- Lege eine Tabelle fuer die bekannten Groessen, die unbekannten gesuchten Groessen und vermutlich benoetigten Hilfsgroessen mit den Spalten Schaetzwert,Term und Ergebnis an.
- Trage die Werte der bekannten Groessen und die daraus einfach berechenbaren Groessen in die Tabelle ein.Sind alle gesuchten Groessen berechnet,so bist du fertig.
- Schaetze gegebenenfalls den Wert einer noch unbekannten Groesse und berechne daraus Schaetzwerte fuer die uebrigen unbekannten Groessen. Sind alle Bedingungen der Aufgabe erfuellt,so bist du fertig.
- Setze gegebenenfalls eine Variable fuer einen der falschen Schaetzwerte ein,der dir dafuer geeignet erscheint (z.B.x fuer den kleinsten Schaetzwert) und berechne Terme in dieser Variablen fuer alle uebrigen Schaetzwerte.Anstelle der fuer die Schaetzwerte nicht erfuellten Bedingung setze diese Bedingung als Gleichung an.
- Loese die entstandene Gleichung.
- Berechne zur Probe die Warte der Terme und trage sie in die Ergebnisspalte ein.Vergleiche dabei nochmals mit dem Text der Aufgabe.Ergaenze gegebenenfalls die Einheit der (physikalischen) Groessen.
- Unterstreiche die Werte der gesuchten Groessen.

3. AUSWERTUNG DER LESERUMFRAGE

3.1 FRAGESTELLUNG

Ziel der Untersuchung war es festzustellen, wie das Heft 'Didaktischer Informationsdienst Mathematik Thema: Proportion' von Praktikern des Mathematikunterrichts der Sekundarstufe I bewertet wird. Dabei ging es nicht um eine detaillierte Analyse, sondern um eine Einschätzung nach dem ersten Lesen.

3.2 ERHEBUNGSINSTRUMENT

Für die Einschätzung wurde ein Erhebungsbogen konzipiert, der zu 12 Kriterien eine Beurteilung anhand einer 7-stufigen Antwortskala ermöglichte. Dabei wurden folgende Kriterien gewählt: Verständlichkeit, Lesbarkeit, Konzeption, Leseanreiz, Betroffenheit, Unterrichtspraktischer Nutzen, Aktualität, Fortschritt, Vollständigkeit, Erfahrungsbezug, Verwirklichung, Konsequenzen. Darüber hinaus wurden die Befragten gebeten, ergänzende Stellungnahmen in freier Form auf der Rückseite anzumerken.

3.3 STICHPROBE

Die Stichprobe setzte sich aus drei Gruppen zusammen:

- Intensivgruppe
  Es handelt sich um Lehrer aller 4 Schulformen der Sekundarstufe I, die bereits zu Beginn des Projektes ihr besonderes Interesse an dieser Thematik bekundeten (N = 62; Rücklauf 27,4% ≙ 17 Personen).
- Repräsentativstichprobe
  Hier liegt eine doppelt geschichtete Zufallauswahl

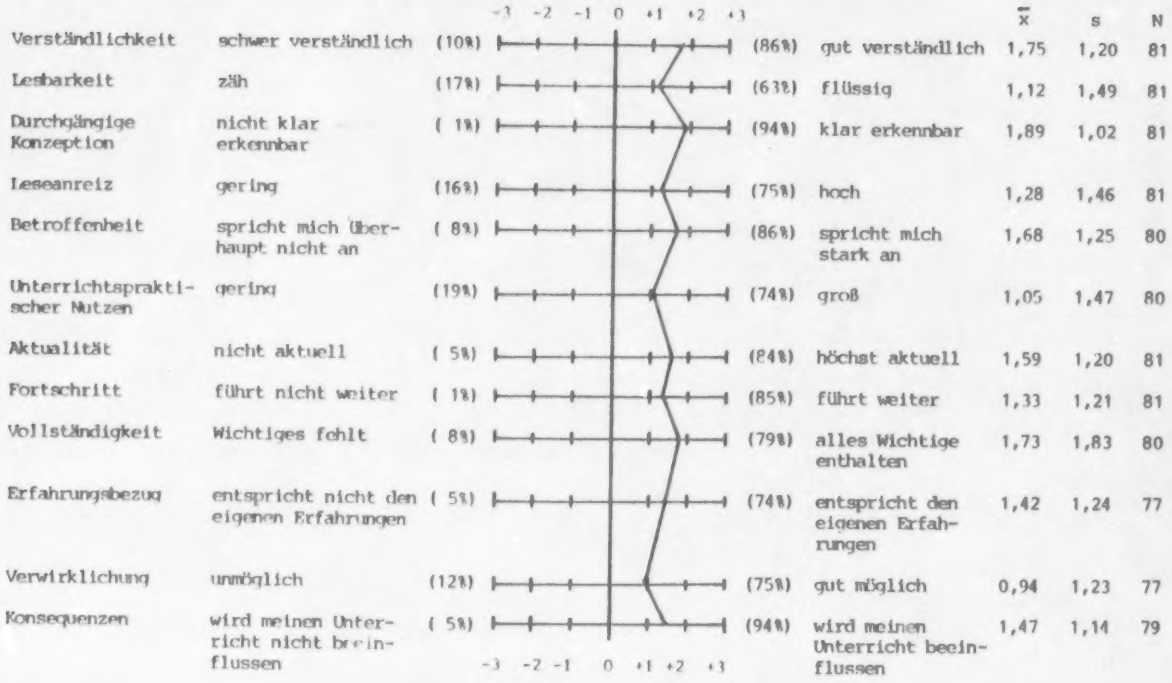
mit jeweils 50 Personen je Schulform (N = 200; Rücklauf 13,5% ≙ 27 Personen) vor.

- Sonstige
  Jedem auf Anforderung verschickten Heft wurde ein Fragebogen beigefügt (Rücklauf 37 Fragebogen).

Die Befragung wurde anonym durchgeführt; den beiden erstgenannten Gruppen wurde je ein andressierter Freiumschlag beigelegt.

3.4 ERGEBNISSE

Die Ergebnisse im Hinblick auf die Einschätzung der 12 Einzelkriterien sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.
Bei der Betrachtung ist zu beachten, daß die links von der Skala angeordneten Begriffe die negative Ausprägung, die rechts von der Skala aufgeführten Bezeichnungen die positive Ausprägung des jeweiligen Kriteriums darstellen. Die in Klammern angegebenen Prozentwerte fassen jeweils die Häufigkeiten der Skalenpunkte 1-3 zusammen. Sie stellen somit Zustimmung (rechte Seite) bzw. Ablehnung (linke Seite) bezogen auf das jeweilige Kriterium dar.
Die Häufigkeit der Antwortmöglichkeit '0' ergibt sich aus der Differenz der Summe der beiden Ausprägungen zu '100'.
Im hinteren Teil der Tabelle finden sich die Mittelwerte ($\bar{x}$), Standardabweichungen (s) und Häufigkeiten der Beantwortung (N). Sie stellen die genauen statistischen Kennwerte der jeweiligen Skalen dar, denen zusätzliche Informationen entnommen werden können. So läßt sich beispielsweise der Angabe der Standardabweichung entnehmen, wie groß die Streuung der Einzelantworten ist, d. h. ob eine eher hohe (d. h. kleineres 's') oder eher niedrige (d. h. größeres 's') Übereinstimmung der Einschätzungen bei den Befragten vorliegt.


-3 -2 -1 0 +1 +2 +3
x̄ s N
Verständlichkeit schwer verständlich (10%) (86%) gut verständlich 1,75 1,20 81
Lesbarkeit zäh (17%) (63%) flüssig 1,12 1,49 81
Durchgängige Konzeption nicht klar erkennbar (1%) (94%) klar erkennbar 1,89 1,02 81
Leseanreiz gering (16%) (75%) hoch 1,28 1,46 81
Betroffenheit spricht mich überhaupt nicht an (8%) (86%) spricht mich stark an 1,68 1,25 80
Unterrichtspraktischer Nutzen gering (19%) (74%) groß 1,05 1,47 80
Aktualität nicht aktuell (5%) (84%) höchst aktuell 1,59 1,20 81
Fortschritt führt nicht weiter (1%) (85%) führt weiter 1,33 1,21 81
Vollständigkeit Wichtiges fehlt (8%) (79%) alles Wichtige enthalten 1,73 1,83 80
Erfahrungsbezug entspricht nicht den eigenen Erfahrungen (5%) (74%) entspricht den eigenen Erfahrungen 1,42 1,24 77
Verwirklichung unmöglich (12%) (75%) gut möglich 0,94 1,23 77
Konsequenzen wird meinen Unterricht nicht beeinflussen (5%) (94%) wird meinen Unterricht beeinflussen 1,47 1,14 79
-3 -2 -1 0 +1 +2 +3

Als generelle Ergebnistendenz läßt sich feststellen, daß bei allen 12 Beurteilungskriterien die positive Einschätzung deutlich überwiegt. Die entsprechenden Prozentwerte der Zustimmung variieren zwischen 63% (Lesbarkeit) und 94% (Durchgängige Konzeption und Konsequenzen). Die im Vergleich zu den Prozentwerten der übrigen Kriterien geringere Zustimmung beim Aspekt 'Lesbarkeit' resultiert - wie aus einigen Stellungnahmen hervorgeht - offensichtlich weniger daraus, daß der Text nicht leserfreundlich formuliert ist bzw. an wichtigen Stellen Brüche in der logischen Abfolge aufweist (denn gerade die Verständlichkeit und die Konzeption werden ja überdurchschnittlich positiv eingeschätzt), sondern dürfte wahrscheinlich in der nicht zufriedenstellenden Druckqualität begründet sein.
Wichtig hervorzuheben ist, daß die Schrift in hoher Übereinstimmung mit den Erfahrungen der Lehrer steht. Dieses Ergebnis wird sowohl gestützt durch die Betroffenheit, die die Schrift bei den Lehrern hervorrief, als auch durch die Tatsache, daß die Lehrer der Schrift einen hohen unterrichtspraktischen Nutzen bescheinigten. Damit korrespondiert schließlich auch, daß fast alle Lehrer der Überzeugung waren, daß durch diese Schrift ihr Unterricht beeinflußt wird. Trotz der hohen Zustimmungsrate von 94% liegt der Mittelwert bei dem Kriterium ' Konsequenzen' lediglich bei 1,47 mit einer geringen Streuung von 1,14. Daraus ist zu folgern, daß hier die Ankreuzung des Skalenpunktes '1' überwiegt, d.h. eine zurückhaltende Zustimmung erfolgte. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, daß bezüglich der Durchführbarkeit der Konsequenzen noch ein gewisses Maß an Unsicherheit vorliegt. Hier scheint es erforderlich, daß zusätzliche Maßnahmen erfolgen,

die den Lehrer in die Lage versetzen, den mit dem in der Schrift dargestellten Konzept verbundenen Anforderungen gerecht zu werden. Bekräftigt wird diese Einschätzung auch durch den in den offenen Stellungnahmen vielfach geäußerten Wunsch nach weitergehenden Informationen und zusätzlichen praktischen Unterrichtsvorschlägen.

Abschließend sei noch ein kurzer Blick den offenen Stellungnahmen gewidmet; 35% der eingegangenen Antwortbogen (N = 28) waren mit solchen Stellungnahmen versehen. Im folgenden sollen daraus einige diskussionswürdige Aussagen vorgestellt werden:

- Proportion sollte wichtige Leitlinie des mathematischen Unterrichts sein
- Situation des Mathematikunterrichts erscheint richtig eingeschätzt
- Schrift bietet Möglichkeit der Einsetzung eigener persönlicher Erfahrungen in einen größeren didaktischen Kontext
- Methodik und Didaktik im Mathematikunterricht wird hier stärker vom Schüler her betrachtet
- Gute Verknüpfung von thematischer Reflexion (Analyse) und Unterrichtspraxis
- Schrift setzt zu stark voraus, daß Lehrer die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Fachgebieten der Mathematik kennen, dies ist aber nicht der Fall ⟶ Kritik an der Lehrerausbildung
- Wunsch, weiterführende Materialien zu entwickeln (UE), die auf diesem Konzept fußen
- fächerübergreifender Aspekt unzureichend (z.B. Physik)
- Unterrichtsvorschläge zu unsystematisch und vereinzelt
- Kern dessen, was proportionales Denken ausmacht, gerät aus dem Blick, weil nach der Betrachtung der verschiedenen Teilaspekte zum Bereich Propor-

tion diese nicht mehr zu einem Gesamtbild zusammengeführt werden
- Mathematikunterricht als Kommunikation zwischen Lehrer und Schüler wird entgegen dem eigenen Anspruch nicht deutlich

Überprüft wurde auch, ob schulformspezifische Unterschiede in der Einschätzung der Schrift festzustellen sind. Insgesamt gesehen ergaben sich keine statistisch relevanten Abweichungen. Lediglich in der Tendenz zeigte sich eine hervorzuhebende Abweichung beim Kriterium 'Verwirklichung': dabei lag die Zustimmungsrate der Hauptschullehrer deutlich niedriger als bei den übrigen Befragten.

4. REGISTER

Das hier folgende, sehr differenziert angelegte Register soll den Zugang zu den Nachweisen unter den verschiedensten Aspekten ermöglichen.

In das Verfasserregister wurden auch Bearbeiter, Mitarbeiter und Herausgeber aufgenommen.

Institutionen und Körperschaften als Herausgeber sind in das Institutionenregister aufgenommen; auf diese Weise kann auch bei unbekannterem Autor der jeweilige Arbeitszusammenhang erkannt werden (z. B. Ergebnisse aus einem Institut, aber von verschiedenen Autoren abgefaßt).

Das Sachregister lehnt sich stark an die bei uns übliche Verschlagwortung der dokumentarisch bearbeiteten Texte an, mit deren Hilfe die jeweiligen Nachweise in der Datenverarbeitungsanlage aufgefunden werden können.

Ein Titelregister soll der schnellen Übersicht über die ausgewerteten Werke dienen.

Das Zeitschriftenregister wurde eingearbeitet, da die hier ausgewerteten Zeitschriften nicht zur Standardausstattung aller Bibliotheken gehören - hier kann nach der Erreichbarkeit eine Vorauswahl getroffen werden.

Das abschließende Standortregister dient denjenigen Benutzern, die das Landesinstitut aufsuchen können, das benötigte Werk ohne Zeitverzug einsehen zu können (die Angabe "Recklinghausen" bedeutet, daß das Werk in die Bibliothek der Außenstelle Recklinghausen aufgenommen wurde).

Da alle Texte den Mitarbeitern des Landesinstituts ständig zur Verfügung stehen müssen, ist eine Ausleihe nicht möglich - wir sind aber gerne bei der Beschaffung der Texte behilflich.

Alle in diesem Heft enthaltenen Literaturnachweise gehören zu dem Projekt "Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Proportion", haben folglich die Kennung: MP.

(In den Registern 4.1 und 4.3 wurde aus Platzersparnisgründen die Titelnummer gekürzt eingetragen, e ist sinngemäß zu ergänzen.)

4.1 VERFASSERREGISTER

A	Ahlers, Rainer	4.0(12)
	Andelfinger, Bernhard	1.1(05), 4.0(08), 5.0(03), 6.0(13), 7.0(06)
	Anthes, Erhard	5.0(05)
	Arbeiter, J.	3.0(24)
B	Baireuther, Peter	6.0(04)
	Barr, George	1.2(07)
	Bauersfeld, Heinrich	1.1(03)f
	Berner, Juergen	4.0(10)
	Biner, Hermann	4.0(15)f
	Birnbaum, P.	7.0(07)
	Borges, Rudolf	7.0(42)
	Bradbard, David A.	5.0(02)
	Brindley, Selwyn	6.0(05)
	Brink, Jan van den	2.0(18)
	Brown, M. L.	1.2(11)
	Bruckheimer, Maxim	6.0(06)
	Buehring, Manfred	4.0(11)
	Bye, Marshall P.	6.0(05)
C	Caldwell, Janet H.	7.0(26)
	Chapman, Robert H.	2.0(23)
	Clemens, M. A. K.	7.0(25)
	Cook, Blair	7.0(11)
	Curnyn, Jim	1.2(07)
D	Dahlgren, Lars Owe	7.0(33)
	Damerow, Peter	7.0(34)
	De Corte, Erik	7.0(21)
	Dreher, Erich	6.0(08)
	Dreyfus, Tommy	4.0(09)

481

E	Easley, John	2.0(07)
	Eisenberg, Theodore	4.0(09)
	Errecalde, Paule	4.0(02)
	Ewert, O.	7.0(24)
F	Falk, Ruma	2.0(30)f
	Fend, Helmut	6.0(08)
	Fey, James T.	1.2(08)
	Fischbein, Efraim	2.0(29)
	Fischer, Egon	3.0(15)
	Flade, Lothar	6.0(17)
	Floer, Juergen	2.0(21)
	Ford, Elinor Rita	2.0(26)
	Formisano, Marina	2.0(06)
	Frey, Herbert	7.0(24)
	Froehlich, W. D.	7.0(24)
	Furneauz, W. D.	2.0(25)
	Fuson, Karen C.	5.0(09)
G	Gagne, Louis	2.0(11)f
	Geisert, Paul George	7.0(31)
	Geisinger, Kurt F.	3.0(23)
	Geraghty, Jean	7.0(15)
	Glaser, Herbert	5.0(06)f
	Gnik, Hans-Joachim	1.1(04)
	Goldin, Gerald A.	7.0(26)
	Grieno, James G.	7.0(16)
	Groeblinghoff, Franz-Josef	4.0(18)
	Gronann, Sigrun	3.0(21)
	Grudenov, Jakob I.	1.2(15)
H	Haenisch, Hans	6.0(08)
	Haussler, Peter	4.0(13)
	Harrison, Bruce	6.0(02), 5.0(05)
	Hart, Kathleen M.	1.2(10)f, 2.0(14)f, 3.0(05), 4.0(05), 5.0(04), 6.0(03), 6.0(18), 7.0(32)

H	Hasemann, Klaus	6.0(12)
	Hefendehl, Lisa	1.1(04)
	Herron, Dudley	3.0(16)
	Hershkowitz, Rina	6.0(06)
	Heymann, Hans Werner	1.1(03)
	Hirstein, J. J.	5.0(08)
	Hogan, T. P.	1.2(04)
	Holtan, Boy I. D.	7.0(17)
	Hopf, Diether	1.2(14)
	Horn, Aleksander Markovic	1.2(15)
	Hylla, Erich	3.0(15)
I	Isenberg, Helga	3.0(22)
J	Jeffrey, Wendell E.	2.0(19)
	Johansson, Bengst	3.0(11)
	Johnson, D. C.	1.2(10)
K	Kantowski, Mary	7.0(04)
	Karplus, Elisabeth F.	2.0(02)f, 2.0(09)
	Karplus, Robert	2.0(01)ff, 2.0(08)
	Kerslake, Daphne	4.0(05)
	Keuthen, B.	7.0(08)
	Kieren, Thomas E.	1.2(13)
	King, Irv	7.0(13)
	Kirsch, Arnold	3.0(17)
	Knifong, J. Dan	7.0(17)
	Krensch, Jochen	3.0(22)
	Kroll, Wolfgang	7.0(41)
	Kuechemann, D. E.	1.2(11), 5.0(04)
	Kurtz, Barry	2.0(05), 2.0(27)
L	Lamarche, J.-P.	7.0(27)
	Lamb, C. E.	5.0(08)
	Lawson, Anton E.	2.0(24)
	Leddy, Tom	2.0(22)
	Lesh, Richard	5.0(01), 7.0(04), 7.0(20)

L	Loercher, G.-A.	3.0(24), 6.0(11)
	Lorenz, Jens Holger	1.1(01), 1.1(03)
	Lyhne, Leif	1.2(05), 3.0(04), 3.0(06)ff
M	Machida, Shiochiro	6.0(09)
	Maier, Hermann	6.0(10), 7.0(01)f
	Manceau, Jean-Pierre	5.0(15)
	Manzat, Ion	2.0(29)
	Marthe, P.	7.0(27)
	Martin, J. Larry	5.0(02), 5.0(10)
	Marton, F.	3.0(07)
	Mester, Ference	7.0(33)
	Mayer, Richard E.	7.0(16)
	Meierhoefer, Bernd	3.0(20)
	Meissner, Hartwig	3.0(18)
	Meyer, Ruth Ann	7.0(14)
	Mierkiewicz, Diane	5.0(01), 7.0(04)
	Mueller, David	2.0(16)
N	Nelson, Doyal	7.0(23)
	Nelson, Katherine J.	2.0(19)
	Nesher, Perla	7.0(28)
	Noelting, Gerald	2.0(10)ff
	Novillis, Larson	6.0(15)
O	Orton, A.	4.0(03)f
	Osborne, Alan	5.0(08), 6.0(19)
P	Pampu, Ileana	2.0(29)
	Parr, Robert B.	2.0(20)
	Paulsen, Albert-Christian	2.0(06)
	Payne, Joseph N.	6.0(01)
	Pechner, U.	7.0(08)
	Peterson, Rita W.	2.0(01)
	Preiss, G.	3.0(24)
	Pulos, Steven	2.0(08)f

484

R	Radatz, Hendrik	1.1(02), 1.2(09)
	Rocco, Graciela	3.0(01)
	Rees, Ruth	1.2(06)f, 2.0(25)
	Reinisch, Anne-Marie	2.0(28)
	Rhonheimer, Martin	3.0(03)
	Richard, J. F.	7.0(19)
	Roberts, Dennis M.	3.0(23)
	Robitaille, David F.	1.2(12)
	Rouchier, Andre	3.0(01)
	Rupley, William	7.0(30)
S	Saljoe, R.	3.0(07)
	Segalla, Angelo	7.0(12)
	Seidel, Gertrud S.	7.0(29)
	Silver, Edward A.	7.0(18)
	Somers, Ralf	7.0(21)
	Suarez, Antonio	3.0(03), 4.0(14), 4.0(16)
	Suellwold, Fritz	3.0(15)
	Sueur, M.	7.0(27)
	Suydam, Marilyn N.	6.0(16), 6.0(19)
	Schildkamp-Kuendiger, Erika	4.0(06)f
	Schubert, Anton	7.0(01)
	Schupp, Hans	2.0(17), 2.0(32), 2.0(34)
	Stage, Elisabeth K.	2.0(08)f
	Steffe, Leslie P.	2.0(20)
	Streefland, Leen	2.0(18), 6.0(07)
	Strehl, R.	7.0(09)
	Sturgess, David	1.1(06)
T	Teubal, Eva	7.0(28)
	Travers, Kenneth	2.0(07)
	Turner, Jonathan	7.0(15)
V	Vergnaud, Gerard	3.0(01)f 4.0(02)
	Viet, Ursula	1.1(02)
	Vinner, Shlomo	6.0(06)
	Vollrath, Hans-Joachim	4.0(17), 5.0(11)ff, 7.0(03)

W	Walther, Gerd	7.0(22)	
	Watson, F. R.	4.0(01)	
	Wheatley, Grayson H.	3.0(16)	
	Wollacott, Charles F.	2.0(15)	
	Wollmann, Warren T.	2.0(03)f,	2.0(24)
	Wunsch, Christian	3.0(19)	
Z	Zelniker, Tamar	2.0(19)	
	Zweng, Marilyn J.	7.0(15)	

4.2 INSTITUTIONENREGISTER

American Educational Research Association
MP-3.0(23) MP-5.0(01) MP-5.0(09)
MP-5.0(10)

Centre for Science Education, Chelsea College
University of London
MP-1.2(10)

Centre for Studies in Science Education, School of
Education (Leeds), Univ. (Leeds)
MP-3.0(02) MP-4.0(07)

CSMS Mathematics Team
MP-1.2(11) MP-3.0(05) MP-4.0(05)
MP-5.0(04) MP-6.0(18)

Deutsches Institut für Fernstudien (Tübingen)
Universität (Tübingen)
MP-3.0(24)

Deutsches Institut für incernationale pädagogische
Forschung (Frankfurt, Main)
MP-3.0(15)

ERIC Science, Mathematics and Environmental
Education Clearinghouse (Ohio)
University (Ohio)
MP-6.0(14) MP-7.0(04) MP-7.0(05)

Georgia Center for the Study of Learning and
Teaching Mathematics
Department of Mathematics Education University of
Georgia
MP-5.0(02) MP-6.0(01)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des
Mathematiques Universite d'Orleans
MP-3.0(01)

Institute of Education (Goeteborg)
University (Goeteborg)
MP-1.2(05) MP-3.0(04) MP-3.0(08)
MP-3.0(10) MP-3.0(12)

Landesinstitut Schleswig-Holstein für Praxis und Theorie der Schule (Kiel)
MP-2.0(33) MP-7.0(35)

National Assessment of Educational Progress (Denver, Colorado)
MP-1.2(01) MP-1.2(02) MP-1.2(03)

Padagogische Hochschule Ruhr (Dortmund)
Bundestagung für Didaktik der Mathematik (14, 1980, Dortmund)
MP-2.0(32) MP-5.0(05) MP-5.0(07)
MP-6.0(11)

Schools Council Project on Statistical Education
MP-7.0(10)

Institut für Didaktik der Mathematik (Bielefeld)
Universität (Bielefeld)
MP-5.0(11) MP-7.0(24)

Wisconsin Research and Development, Center for Cognitive Learning
University of Wisconsin
MP-2.0(20)

4.3 SACHREGISTER

A

Abzählproblem 5.0(06)f
Addition 2.0(11), 5.0(09), 6.0(06), 7.0(19), 7.0(28)f, 7.0(32)
Algorithmus 2.0(25), 4.0(13), 6.0(03), 6.0(12), 6.0(19), 7.0(05), 7.0(08)
Algebra 1.2(12), 3.0(08)f, 4.0(08), 6.0(10), 7.0(01), 7.0(11), 7.0(26)
Anschauung 2.0(31)
Antiproportionalität 2.0(28), 4.0(18)
Arithmetik 1.2(09), 1.2(13), 1.2(15), 2.0(12), 3.0(02), 5.0(03), 6.0(07), 6.0(10), 7.0(01), 7.0(12), 7.0(15), 7.0(18), 7.0(28)
Aufgabenanalyse 7.0(29)
Australien 7.0(25)

B

Befragung: Student 1.2(02), 7.0(06), 7.0(33)
Begriffsbildung 3.0(04), 4.0(14)
Berufsaufbauschule 4.0(06)
Berufsfachschule 4.0(10)ff
Berufsschule 4.0(10)
Beziehung: Denken 2.0(08), 2.0(12), 2.0(14), 2.0(18), 2.0(21), 4.0(07)
Bibliographie 1.2(05)
Bibliographische Angaben 1.2(07), 5.0(01), 6.0(16)
Bildungspolitik 7.0(34)
Bruchrechnung 1.1(06), 1.2(13), 2.0(11), 2.0(14), 2.0(20), 3.0(05), 6.0(01), 6.0(04)ff, 6.0(10)ff, 6.0(15)ff, 7.0(05)

C

Computer 3.0(23), 6.0(09)
Computerunterstützter Unterr. 4.0(01)
Curriculum 6.0(05)
Curriculumentwicklung 1.2(12), 2.0(17), 2.0(32), 2.0(34)

D Denken: Kind 2.0(07)f, 2.0(19), 2.0(24), 3.0(03), 3.0(08), 3.0(10), 4.0(14), 4.0(16),

Denkfähigkeit 2.0(07)

Denkprozess 2.0(07), 4.0(13)f

Deutschland - BRD 1.1(01), 2.0(06), 4.0(06)f

Deutschland - DDR 1.2(15), 3.0(21)f

Deutschland - Hessen 6.0(08)

Deutschland - Nordrhein-Westfalen 1.1(05)

Dezimalzahl 6.0(09), 6.0(13), 6.0(17)

Diagramm 4.0(01), 4.0(03)ff,

Didaktische Analyse 1.2(13), 2.0(15), 4.0(17)f, 7.0(01), 7.0(03)

Differentialrechnung 3.0(08)f

Division 7.0(09), 7-0(15)

Drehung 5.0(04)

Dreisatz 2.0(20), 2.0(28), 3.0(01)ff, 3.0(06)ff, 3.0(11), 3.0(14), 3.0(16)ff, 3.0(20), 3.0(24), 4.0(03)f, 4.0(18), 6.0(01)

E Empirische Forschung 1.1(01)f, 2.0(15), 3.0(03), 3.0(09), 3.0(12)f, 5.0(01)ff, 6.0(01), 6.0(03), 6.0(07), 6.0(19), 7.0(03)ff

Empirische Untersuchung 1.2(01)ff, 1.2(09), 1.2(14), 2.0(01)ff, 2.0(05), 2.0(08), 2.0(11)ff, 2.0(16), 2.0(21), 2.0(30)f, 3.0(08), 3.0(18), 3.0(21), 3.0(23), 4.0(02)ff, 4.0(10)ff, 5.0(04), 5.0(10), 5.0(12)f, 6.0(05)f, 6.0(08), 6.0(10)f, 6.0(13), 6.0(15), 6.0(17), 7.0(01)f, 7.0(09), 7.0(11)ff, 7,0(16), 7.0(19), 7.0(21)ff, 7.0(25)ff, 7.0(29)ff

Entwicklungspsychologie 3.0(03)

Erfahrungsbericht: Bibliographie 2.0(33), 7.0(35)

Evaluation 2.0(34)

Experiment 1.1(06), 2.0(09), 2.0(11)f, 2.0(19), 2.0(21), 2.0(23), 2.0(28)ff, 3.0(03), 4.0(15), 4.0(17), 5.0(15), 7.0(28)

490

F Fachsprache 5.0(11)
Fächerübergreifender Unterricht 3.0(13)
Fallstudie 1.1(04), 6.0(07)
Fehler 1.2(15), 5.0(11), 6.0(10)
Fehlleistung 1.2(09)
Fernstudium 3.0(24)
Flächeninhalt 5.0(08)
Forschung 1.1(03), 1.2(10), 2.0(26), 7.0(15)
Forschungsbericht 2.0(34), 3.0(09), 3.0(11)f, 7.0(23)
Frankreich 2.0(28), 3.0(01)f, 4.0(02), 7.0(19)
Fragebogen: Textaufgabe 7.0(27)
Funktion 4.0(06)ff, 4.0(13)ff, 4.0(17)

G Geometrie 1.2(04), 1.2(12), 1.2(15), 2.0(04), 2.0(25), 2.0(28), 3.0(01)f, 4.0(15), 5.0(01)ff, 5.0(09)ff, 5.0(14), 6.0(10), 6.0(15)
Gesamtschule 6.0(08)
Gleichungslehre 7.0(19), 7.0(35)
Grafische Darstellung 4.0(01)
Großbritannien 1.1(06), 1.2(11), 2.0(13)f, 3.0(05), 4.0(01), 4.0(05), 5.0(04), 6.0(18), 7.0(32)
Grundschule 2.0(01)ff, 2.0(20), 4.0(15), 5.0(03), 7.0(14)f, 7.0(18), 7.0(37)
Gruppenarbeit 2.0(29)
Gymnasium 1.2(14), 2.0(06), 3.0(07), 4.0(08)

H Hauptschule 2.0(17), 2.0(32), 3.0(15), 3.0(24), 4.0(17), 5.0(05), 6.0(04), 6.0(11), 6.0(12), 7.0(03), 7.0(09), 7.0(17), 7.0(34)

I Information 1.2(10)
Intelligenz 2.0(01)ff, 2.0(26), 7.0(24)
Interview 1.1(05), 1.2(07), 1.2(11), 1.2(12), 1.2(14), 2.0(14), 4.0(08), 5.0(08), 6.0(13), 6.0(18), 7.0(25)
Israel 2.0(31), 4.0(09), 6.0(06), 7.0(28)

K Kanada 1.2(12
Karplus 2.0(07)
Kind: Verstehen 1.2(11)
Klassifikation: Ähnlichkeit 5.0(12)f
Korrelation 2.0(11)
Kurvendiskussion 4.0(08)

L Lehren 1.2(13), 2.0(15), 5.0(02)
Lehrerfortbildung 1.1(06)
Lehrerheft 7.0(10)
Lehrplan 3.0(13), 7.0(35)
Leistungsmessung 1.2(12), 2.0(20), 3.0(15)
Leistungsfähigkeit 5.0(11), 6.0(08), 7.0(24)
Lernen 4.0(10), 5.0(02), 7.0(13)f,
Lernerfolg 7.0(31)
Lernprozess 3.0(06)f, 3.0(09), 3.0(12), 4.0(13)
Lernpsychologie 2.0(07)
Lerntheorie 6.0(02)
Lernverhalten 3.0(06)f, 3.0(09), 3.0(11)f, 3.0(14), 4.0(16)
Lernziel: Kontrolle 4.0(12)
Lesen 7.0(11)
Lineare Funktion 4.0(10)ff
Lineare Gleichung 7.0(37)
Logik 2.0(12)

M Materialsammlung 1.2(01), 1.2(03)
Mathematikunterricht: Reform 1.2(12)
Mathematische Logik 2.0(23)
Mathematisches Denken 4.0(05), 7.0(21), 7.0(28)f, 7.0(37)
Matrix 3.0(10)
Mechanik 4.0(17)
Methodik 1.2(09), 3.0(19)f, 7.0(01)
Multiplikation 7.0(15)

N Natürliche Zahl 6.0(03)

Naturwissenschaft 1.2(02), 2.0(04), 2.0(06)

Naturwissenschaftlicher Unterr. 1.2(05), 3.0(06), 3.0(04), 3.0(08)f, 3.0(16)

O Orientierungsstufe 2.0(09), 5.0(03), 6.0(04), 6.0(12), 7.0(13), 7.0(17), 7.0(21), 7.0(25), 7.0(27), 7.0(35)

P Physikunterricht 3.0(07), 3.0(13), 4.0(13), 5.0(04)

Piaget 2.0(07), 4.0(14), 5.0(09), 6.0(02)

Primarstufe 2.0(16), 2.0(18)ff, 2.0(23), 4.0(15)f, 5.0(06)ff, 7.0(19), 7.0(24), 7.0(26), 7.0(29)

Problem 1.1(06), 7.0(20)

Problemlösen 2.0(09), 2.0(29), 4.0(02), 4.0(05), 5.0(05), 5.0(05), 5.0(06)ff, 5.0(12)f, 6.0(11), 7.0(08), 7.0(10)ff, 7.0(14)ff, 7.0(23), 7.0(27)ff, 7.0(31)ff, 7.0(36)f

Prozentrechnung 3.0(18)ff, 3.0(24)

Psychologie 1.2(08), 1.2(15), 2.0(31), 7.0(20)

R Rationale Zahl 1.2(13)

Realschule 6.0(11)

Rechentest 3.0(15)

Relation 4.0(06)ff

S Sachanalyse 3.0(09), 3.0(12), 3.0(14), 3.0(24)

Sachrechnen 1.2(12), 3.0(01)f, 3.0(22), 7.0(01)ff, 7.0(06)f, 7.0(09), 7.0(26), 7.0(34), 7.0(35)

Schüler-Lehrer-Beziehung 1.1(03)

Schweden 1.2(05), 3.0(04), 3.0(06), 3.0(08)ff, 7.0(33)

Schweiz 3.0(03), 4.0(15)f,

Sekundarstufe II 2.0(11), 4.0(06)f, 4.0(10)ff, 7.0(36)

Soziales Lernen 6.0(08)

Sozialwissenschaft 1.2(08)

S	Spiel	2.0(22), 4.0(16)
	Spielzeug	5.0(04)
	Spontaneität	1.1(05), 2.0(07)
	Subtraktion	7.0(15), 7.0(28)
	Symmetrie	5.0(03), 5.0(06)f
ST	Statistik	2.0(29), 2.0(33), 3.0(23), 7.0(10)
	Stochastik	2.0(17), 2.0(32), 2.0(34)
	Strukturalismus	4.0(14)
	Student	7.0(22)
T	Tagungsbericht	2.0(32), 2.0(34)
	Test	1.2(02), 1.2(06)f, 1.2(10)f, 2.0(02), 2.0(05), 2.0(07)f, 2.0(20), 2.0(24)f, 3.0(23), 4.0(06)f, 4.0(09), 5.0(10), 6.0(02), 6.0(05), 6.0(09), 7.0(13)f, 7.0(16), 7.0(30)f
	Textaufgabe	3.0(01)f, 3.0(21)f, 4.0(05), 7.0(02), 7.0(07), 7.0(11)f, 7.0(17)f, 7.0(21)f, 7.0(26), 7.0(28)ff, 7.0(32), 7.0(35)ff
	Therapie	2.0(13)
	Training	2.0(19)
	Trigonometrie	5.0(09)f, 5.0(15)
U	Übung	1.2(01), 1.2(03), 2.0(22)
	Unterrichtseinheit	7.0(10)
	Unterrichtsentwurf	4.0(10)ff
	Unterrichtsform	7.0(24)
	Unterrichtsforschung	1.1(03)f, 1.2(04)f 1.2(08)f, 1.2(11), 1.2(14), 2.0(10), 2.0(23), 2.0(33), 3.0(05), 6.0(01), 6.0(16), 6.0(18)
V	Variable	3.0(01)f, 3.0(14), 4.0(07), 7.0(37)
	Vereinigte Staaten	1.2(01)ff, 1.2(13), 2.0(01), 2.0(19)f, 5.0(01)f, 5.0(09)f, 5.0(01), 7.0(11), 7.0(13), 7.0(17), 7.0(20), 7.0(23), 7.0(26), 7.0(30)

V	Vergleichsuntersuchung	1.2(04), 1.2(08), 1.2(15), 2.0(01), 2.0(04)ff, 2.0(18)f, 2.0(21), 2.0(23), 2.0(25ff, 6.0(08), 7.0(21)
	Volksschule	3.0(03)
	Volumen	3.0(01)f, 3.0(16)
W	Wahrnehmung	2.0(03), 2.0(16), 2.0(21), 2.0(31)
	Wahrscheinlichkeitsrechnung	2.0(15), 2.0(30), 2.0(32)f
	Wellenlehre	4.0(17)
Z	Zeitgeschichte	7.0(34)
	Zinsrechnung	3.0(24)

4.4 TITELREGISTER

/Acquisition des "Structures Multiplicatives" dans le premier cycle du second degre/
MP-3.0(01)

En /aemensmethodisk forskningsansats foer naturvetenskaplige aemnen och matematik/
MP-3.0(13)

/Algorithmic Learning/
MP-6.0(14) MP-7.0(05)

/Analysis and improvement of sixth-graders ability to solve word problems/
MP-7.0(21)

An /Analysis of Arithmetic, Linguistic, and Algebraic Structural Variables That Contribute to Problem Solving Difficulty in Algebra Word Problems/
MP-7.0(11)

An /Analysis of Research Needs in Projective, Affine, and Similarity Geometries/
MP-5.0(09)

/Analysis of the concept of probability in young children/
MP-2.0(30)

/Analyzing childrens errors on written mathematical tasks/
MP-7.0(25)

/Applied mathematical problem solving/
MP-7.0(04)

/Arkimedes i klassen/
MP-3.0(14)

/Auswertung einer Umfrage zum Thema: "Funktion"/
MP-4.0(08)

/Auswirkungen des Schulsystems auf Schulleistungen und soziales Lernen/
MP-6.0(08)

/Autonomous learning and the reading of mathematical texts/
MP-7.0(22)

/Begreppet FOU i ett aemnesmetodiskt perspektiv/
MP-3.0(06)

/Begreppsbilning inom matematik och naturvetenskapliga aemnen: ett forskningsprojekt om gymnasieelevers foerstaelse av vissa fysikaliska aspekter av omvaerlden/
MP-3.0(07)

Der /Begriff der Funktion im Volksschulunterricht anknüpfend an die Dreisatzlehre/
MP-4.0(15)

/Bruchrechnen - Vergebliche Liebesmuehe?/
MP-6.0(04)

/Brueche oder Dezimalzahlen?/
MP-6.0(13)

/Childrens Understanding of Mathematics: 11-16/
MP-1.2(11)

The /Child's Concept of Proportionality: A Re-examination/
MP-2.0(19)

The /Child's Concept of Ratio of Distances/
MP-5.0(10)

/Children's Strategies of Solving Verbal Problems/
MP-7.0(15)

/Comparison of ratios and the chance concept in children/
MP-2.0(29)

A /Comparison of the Intellectual Abilities of Good and Poor Problems Solvers/
MP-7.0(14)

Les /contraintes de fonctionnement des systemes mnesiques dans la resolution des problemes/
MP-7.0(19)

A /Cross-Sectional Study of the Development of the Mathematical Concept of a Function in Secondary Schoolchildren of Average and Above Average Ability/
MP-4.0(04)

/Didactics and asquisition of'multiplicative structures' in secondary schools/
MP-3.0(02)

/Diskussion zur Gestaltung des Stoffabschnittes "1. 2. Prozentrechnung" in Klasse 7/
MP-3.0(22)

/Denkoperationen und Lernprozesse 12- bis 16jähriger Schüler beim Erkennen einfacher funktionaler Beziehungen im Physikunterricht/
MP-4.0(13)

The /development of childrens understanding of proportions/
MP-2.0(23)

The /development of proportional reasoning and the ration concept/
MP-2.0(10)

The /development of proportional reasoning in four different contexts/
MP-2.0(11)

The /Development of the Concepts of Ration and Fraction in the Fourth, Fifth, and Sixth Years of the Elementary School/
MP-2.0(20)

/Developmental level and learning to solve problems of proportionality in the classroom/
MP-2.0(24)

The /Dimensions of Mathematics Difficulties/
MP-2.0(25)

/Direct proportion/
MP-2.0(22)

/Diskussionspapier zur empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik/
MP-1.1(02)

/Documentation of teacher movement toward process-enriched teaching of fractions and ratios/
MP-6.0(05)

/Dreisatzrechnung in einem modernen Mathematik-unterricht/
MP-4.0(18)

/Early adolescents' Structure of proportional reasoning/
MP-2.0(08)

The /Effects of Numerical Characteristics on the Difficulty of Proportion Problems/
MP-7.0(30)

/Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung/
MP-3.0(17)

Der /Einfluß der sprachlichen Formulierung von Rechenaufgaben auf die Lösungswahrscheinlichkeit/
MP-7.0(29)

/Einführung in die Unterrichtseinheit "Lineare Funktionen"/
MP-4.0(10) MP-4.0(11)

/Empirische Befunde zum Textrechnen/
MP-7.0(02)

/Empirische Forschung in der Mathematikdidkatik/
MP-1.1(01)

/Evaluation eines Curriculums/
MP-2.0(17)

/Expanded Abstract and Analysis of the "Karplus Studies"/
MP-2.0(07)

/Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht/
MP-1.1(04)

/Fertigkeiten und Problemlöseverhalten von Hauptschülern im Mathematikunterricht/
MP-5.0(05)

/Formales Denken und Funktionsbegriffe bei Jugendlichen/
MP-4.0(14)

/Forschung in der Mathematikdidaktik/
MP-1.1(03)

/Fractions/
MP-6.0(18)

/From whole numbers to fractions and decimals/
MP-6.0(03)

/Function Concepts: Intuitive Baseline/
MP-4.0(09)

Die /Gestaltung der Unterrichtseinheit "Die lineare Funktion y=mx+n" unter besonderer Berücksichtigung ausgewählter Verfahren zur Lernzielkontrolle/
MP-4.0(12)

/Graphs/
MP-4.0(05)

/Grundprobleme des Sachrechnens/
MP-7.0(09)

/Hilfen für die Wahl der Variablen beim Lösen von Textaufgaben/
MP-7.0(37)

/Ikonic and Symbolic Representation/
MP-7.0(15)

/Individual Differences in Calculator Attitudes and Performance in a Statistics Course/
MP-3.0(23)

/Intellectual development beyond elementary school/ 2-5, 7/
MP-2.0(01) MP-2.0(02) MP-2.0(03)
MP-2.0(04) MP-2.0(05)

/Intention, Implementation, Realization: the Impact of Curriculum Reform in Mathematics/
MP-1.2(12)

/Investigations into the mathematical difficulties experienced by students and the reason for these difficulties/
MP-1.2(07)

/Klassifikationen nach Ähnlichkeit/
MP-5.0(12)

A /learning hierarchy for ratios and fractions/
MP-2.0(12)

/Learning the concept of a function/
MP-4.0(07)

/Lernschwierigkeiten, die sich aus dem umgangssprachlichen Verständnis geometrischer Begriffe ergeben/
MP-5.0(11)

/Lernvoraussetzung - Lernergebnis/
MP-4.0(06)

/Lineare Funktion/
MP-3.0(03)

/Locating proper fractions on number lines/
MP-6.0(15)

/Locutions Inductrices et Destractrices: De Plus Que, De Moins Que/
MP-7.0(27)

/Lösungsstrategien bei Abzählproblemen/
MP-5.0(07)

/Mathematics Education Research on Curriculum and Instruction
MP-1.2(08)

/Mathematikunterricht./
MP-1.2(14)

Das /Mausspiel/
MP-4.0(16)

Eine /Methode zum Auffinden des Ansatzes bei sogenannten Textaufgaben/
MP-7.0(36)

/Mistakes in Mathematics/
MP-2.0(14)

/Moderne Mathematik zur Entwicklung der math. und interllektuellen Leistungsfähigkeit/
MP-7.0(24)

/National Assessment of Educational Progress/
MP-1.2(01)

/New Computation System with flexibility/
MP-6.0(09)

/On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers/
MP-1.2(13)

The /perseption of randomness/
MP-2.0(31)

/Perseptual reasoning and proportion/
MP-2.0(16)

/Problemlösestrategien von Schülern/
MP-7.0(08)

The /Problems of the Teacher of Mathematics/
MP-1.1(06)

/Processes needed by average ability middle school children in the solution of "real world" mathematics problems/
MP-7.0(20)

/Proportion et equilibre de la balance/
MP-2.0(28)

/Proportions-och proportionalitetstaenkande hos gymnasieelever, ak 1, N-och T-linjerna/
MP-3.0(11)

/Proportionnalite sur du papier/
MP-5.0(14)

/Proportionstaenkande och taenkande i proportioner/
MP-3.0(09)

/Provocative texts and spontaneours reactions of teachers - a method for recognizing teaching and learning of mathematics/
MP-1.1(05)

/Prozentrechnung "mangelhaft"?/
MP-3.0(18)

/Prozentrechnen und Diagramme/
MP-3.0(19)

/Prozent- und Zinsrechnen, Verhältnisrechnen/
MP-3.0(24)

/Ratio and proportion/
MP-3.0(05)

/Ratios and Fractions/
MP-6.0(02)

/Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts/
MP-5.0(01)

/Rechentest RT 8+/
MP-3.0(15)

Reflections and totations/
MP-5.0(04)

A /research approach into Science Education at Goeteborg/
MP-3.0(04)

/Research in Science Education: Sweden 1976/
MP-1.2(05)

/Restructuring of Meaningful Information in Problem Solving/
MP-7.0(16)

/Review of recent research. Related to thc concepts of fractions and of ratio./
MP-6.0(16)

/Review of Research on Fractions/
MP-6.0(01)

The /role of diagrams in mathematical education/
MP-4.0(01)

/Sachrechnen./ Didaktische Materialien für die Hauptschule./
MP-7.0(03)

/Sachrechnen./Empirische Befunde, didaktische Analysen, methodische Anregungen./
MP-7.0(01)

/Sachrechnen - Mathematik, Folklore oder was sonst?/
MP-7.0(06)

A /Search for Reading Difficulties Among Erred Word Problems/
MP-7.0(17)

The /Second Assessment of Mathematics, 1077-78/
MP-1.2(03)

/Secondary school children's understandig of Mathematics/
MP-1.2(10)

/Selected Supplemental Mathematics Exercises to the 1975-76 Assessment/
MP-1.?(02)

/Some cognitive facots as causes of mistakes in the addition of fractions/
MP-6.0(06)

/Some important influences on the teaching of probability to young children/
MP-2.0(15)

/Some observational results concerning the mental constitution of the concept of fraction/
MP-6.0(07)

/Some real pictures from the classroom-based research in Physics teaching at Goeteborg/
MP-3.0(10)

/Some steps in the understanding and the use of scales and axis by 10-13 year-old students/
MP-4.0(02)

/Some theoretical considerations and experiences related to Research and Development in the Teaching of Mathematics and Sciense/
MP-3.0(12)

/Space and Geometry/
MP-5.0(02)

/Spatial visualization and proportional reasoning of early adolescents/
MP-2.0(09)

The /Spectrum of Proportion Mastery among New York Parochial School Children/
MP-2.0(26)

A /Survey of proportional reasoning and control variables in seven countries/
MP-2.0(06)

/Schülerfehler im Mathematikunterricht/
MP-6.0(10)

/Schülerversuche zum Funktionsbegriff/
MP-4.0(17)

/Schwierigkeiten beim Bruchrechnen/
MP-6.0(11)

/Statistics in your world/
MP-7.0(10)

/Strategies and errors in secondary mathematics - the addition strategy in ration/
MP-2.0(13)

The /structure of mathematics abilities. Some examples illustrating dimensions of difficulty./
MP-1.2(06)

/Student Classification of Mathematical Word Problems/
MP-7.0(18)

/Students' Conceptions of Subject Matter/
MP-7.0(33)

/Student's interest in particular mathematics Topics/
MP-1.2(04)

/Students misconceptions about area measure/
MP-5.0(08)

/Studies of Mathematics in Teaching of Science in Goeteborg/
MP-3.0(08)

A /study of teaching for proportional reasoning/
MP-2.0(27)

A /study of the hierarchical competencies underlying the problem-solcing use of proportion/
MP-7.0(31)

/Symmetrieerfassung und das Lösen von Abzählproblemen/
MP-5.0(06)

/Teaching about Functions in the Secondary School/
MP-4.0(03)

/Textaufgaben aus der Prozentrechnung/
MP-3.0(20)

A /Trend in Problem Sohing Research/
MP-7.0(23)

/Typische Fehler in Schülerarbeiten unter psychologischer Sicht/
MP-1.2(15)

/Über die Verständnisschwierigkeiten von Hauptschülern bei der Bruchrechnung?/
MP-6.0(12)

The /Understanding of Ratio in the Secondary School/
MP-7.0(32)

The /Understanding of Similarity and Shape in Classefying Tasks/
MP-5.0(13)

A /Unit Factor Method for solving Proportion problems/
MP-3.0(16)

/Unterrichtsversuche zum Bereich Sachrechnen, Textaufgaben/
MP-7.9(35)

/Untersuchungen zu Fehlleistungen im Mathematikunterricht
MP-1.2(09)

/Untersuchungen zur Entwicklung und Förderung des Verhältnisdenekens bei Kindern/
MP-2.0(21)

/Using Structural Variables to Predit Word./ Problem Solving Difficulty for Junior College Arithmetic Students/
MP-7.0(12)

/Variables affecting word problem difficulty in elementary school mathematics/
MP-7.0(26)

/Verbal cues as an interfering factor in verbal problem solving/
MP-7.0(28)

/Vorschlag für die Gestaltung des Stoffabschnittes "1.2 Prozentrechnung" in Klasse 7/
MP-3.0(21)

/Weitere Erfahrungsberichte und Unterrichtsversuche zum Bereich Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung/
MP-2.0(33)

/Wieviel Mathematik braucht ein Hauptschüler?/
MP-7.0(34)

/Young children (6-8). Ratio and proportion./
MP-2.0(18)

/Zum selbständigen Finden von Lösungsansätzen für Sach- und Anwendungsaufgaben. 2/
MP-7.0(07)

/Zur Entwicklung von Rechenfertigkeiten und zu einigen typischen Schülerfehlern/
MP-6.0(17)

/Zur Lage: Schulmathematik./ Standort und Perspektiven./
MP-5.0(03)

/Zweiter Zwischenbericht über das Curriculum - Projekt "Stochastik in der Hauptschule"/
MP-2.0(32)

/Zwischenbericht über das Curriculum-Projekt "Stochastik in der Hauptschule"/
MP-2.0(34)

4.5 ZEITSCHRIFTENREGISTER

Aritmetic Teacher
MP-5.0(08)

Child Development
MP-2.0(09)

Educational Studies in Mathematics
MP-2.0(10)

Investigations in Mathematics Education
MP-2.0(07)

Journal for Research in Mathematics Education
MP-1.2(04)

Journal für Mathematikdidaktik
MP-1.1(01) MP-1.1(02) MP-1.2(09)

Journal of Curriculum Studies
MP-1.2(12)

Journal of experimented child psychology
MP-2.0(19)

Journal of Research in Science Teaching
MP-2.0(06)

Mathematics School
MP-2.0(22)

Mathematics Teaching
MP-2.0(14) MP-2.0(16)

Mathematik in der Schule
MP-1.2(15)

Der Mathematikunterricht
MP-2.0(17)

School Science and Mathematics

MP-2.0(01)	MP-2.0(02)	MP-2.0(03)
MP-2.0(05)	MP-2.0(04)	MP-5.0(15)

4.6 STANDORTREGISTER

MP-1.1(01)	MA-AA 00-37
MP-1.1(02)	MA-AA 00-38
MP-1.1(03)	MA-AA 10-12
MP-1.1(04)	Recklinghausen
MP-1.1(05)	MA-AA 00-45
MP-1.1(06)	MA-AA 10-2
MP-1.2(01)	MA-AA 51-2
MP-1.2(02)	MA-AA 51-3
MP-1.2(03)	MA-AA 51-4
MP-1.2(04)	MA-AA 00-40
MP-1.2(05)	MA-AA 00-43
MP-1.2(06)	MA-AA 00-35
MP-1.2(07)	MA-AA 00-36
MP-1.2(08)	MA-AA 00-39
MP-1.2(09)	MA-AA 00-47
MP-1.2(10)	Math. 258
MP-1.2(11)	MA-AA 10-8
MP-1.2(12)	MA-AA 00-41
MP-1.2(13)	MA-AA 00-3
MP-1.2(14)	Dok. 34-95
MP-1.2(15)	MA-AA 00-42
MP-2.0(01)	MA-AM 00-3
MP-2.0(02)	MA-AM 00-4
MP-2.0(03)	MA-AM 00-5
MP-2.0(04)	MA-AA 00-49
MP-2.0(05)	MA-AA 00-50
MP-2.0(06)	MA-AA 00-48
MP-2.0(07)	MA-AA 00-51
MP-2.0(08)	Archiv; MA-AA 00-52
MP-2.0(09)	MA-AA 00-45
MP-2.0(10)	MA-AA 00-53

MP-2.0(11)	MA-AA 00-52
MP-2.0(12)	MA-AA 00-52
MP-2.0(13)	MA-AA 00-45
MP-2.0(14)	MA-AA 00-54
MP-2.0(15)	MA-AM 10-3
MP-2.0(16)	MA-AA 00-55
MP-2.0(17)	MA-AM 10-5
MP-2.0(18)	MA-AA 00-35
MP-2.0(19)	MA-AA 00-56
MP-2.0(20)	MA-AA 00-57
MP-2.0(21)	MA-AA 00-33
MP-2.0(22)	MA-GR 30-3
MP-2.0(23)	MA-AA 00-59
MP-2.0(24)	MA-AA 00-60
MP-2.0(25)	MA-AA 00-61
MP-2.0(26)	Dok. 7637
MP-2.0(27)	Dok. 7636
MP-2.0(28)	MA-AA 00-45
MP-2.0(29)	MA-AM 00-2
MP-2.0(30)	MA-AA 00-35
MP-2.0(31)	MA-AA 00-45
MP-2.0(32)	MA-AM 10-6
MP-2.0(33)	MA-AM 00-1
MP-2.0(34)	MA-AM 10-7
MP-3.0(01)	MA-AA 00-62
MP-3.0(02)	MA-AA 00-63
MP-3.0(03)	MA-AY 51-1
MP-3.0(04)	MA-AA 00-44
MP-3.0(05)	MA-AA 10-8
MP-3.0(06)	MA-AA 00-76
MP-3.0(07)	Math. 1034
MP-3.0(08)	MA-AA 00-46
MP-3.0(09)	MA-AA 00-77
MP-3.0(10)	MA-AA 00-75
MP-3.0(11)	Math. 1036
MP-3.0(12)	MA-AA 00-64

MP-3.0(13)	Math. 1035
MP-3.0(14)	MA-AA 00-65
MP-3.0(15)	MA-AL 51-1
MP-3.0(16)	MA-AA 00-66
MP-3.0(17)	MA-AL 00-4
MP-3.0(18)	MA-AL 10-13
MP-3.0(19)	MA-AL 00-3
MP-3.0(20)	MA-AL 00-2
MP-3.0(21)	MA-AL 31-10
MP-3.0(22)	Archiv
MP-3.0(23)	MA-AA 10-4
MP-3.0(24)	MA-AL 31-1
MP-4.0(01)	MA-AA 00-45
MP-4.0(02)	MA-AA 00-52
MP-4.0(03)	MA-AY 10-4
MP-4.0(04)	Archiv
MP-4.0(05)	MA-AA 10-8
MP-4.0(06)	MA-AY 10-3
MP-4.0(07)	MA-AA 00-68
MP-4.0(08)	MA-AY 00-1
MP-4.0(09)	MA-AA 00-45
MP-4.0(10)	MA-AL 32-1
MP-4.0(11)	MA-AL 32-2
MP-4.0(12)	MA-AL 10-1
MP-4.0(13)	PH-AA 00-12
MP-4.0(14)	MA-AY 00-4
MP-4.0(15)	MA-AY 31-1
MP-4.0(16)	MA-AA 00-69
MP-4.0(17)	MA-AY 10-2
MP-4.0(18)	MA-AL 10-5
MP-5.0(01)	MA-GE 00-2
MP-5.0(02)	MA-GE 00-3
MP-5.0(03)	MA-AA 10-14
MP-5.0(04)	MA-AA 10-8

MP-5.0(05)	MA-AA 10-6
MP-5.0(06)	MA-GE 10-2
MP-5.0(07)	MA-AA 10-6
MP-5.0(08)	MA-GE 20-1
MP-5.0(09)	MA-GE 00-2
MP-5.0(10)	MA-GE 00-2
MP-5.0(11)	MA-AA 00-73
MP-5.0(12)	MA-GE 00-4
MP-5.0(13)	MA-GE 00-5
MP-5.0(14)	MA-GE 00-6
MP-6.0(01)	MA-AA 00-3
MP-6.0(02)	Archiv
MP-6.0(03)	MA-AL 00-5
MP-6.0(04)	MA-AL 10-14
MP-6.0(05)	MA-AA 00-45
MP-6.0(06)	MA-AA 00-52
MP-6.0(07)	MA-AL 00-6
MP-6.0(08)	MA-AA 00-71
MP-6.0(09)	Archiv
MP-6.0(10)	MA-AA 00-72
MP-6.0(11)	MA-AA 10-6
MP-6.0(12)	Archiv
MP-6.0(13)	MA-AL 00-7
MP-6.0(14)	MA-AL 10-21
MP-6.0(15)	MA-AL 20-2
MP-6.0(16)	MA-AA 00-35
MP-6.0(17)	MA-AL 10-11
MP-6.0(18)	MA-AA 10-8
MP-7.0(01)	MA-AA 10-1
MP-7.0(02)	MA-AA 10-24
MP-7.0(03)	Archiv
MP-7.0(04)	MA-AA 00-30
MP-7.0(05)	MA-AL 10.21
MP-7.0(06)	MA-AA 00-74

MP-7.0(07)	Archiv
MP-7.0(08)	MA-AA 31-7
MP-7.0(09)	Math. 102
MP-7.0(10)	MA-AM 31-1
	MA-AM 31-2a bis 2h
	MA-AM 31-3a bis 3h
MP-7.0(11)	MA-AL 10-10
MP-7.0(12)	MA-AA 10-18
MP-7.0(13)	MA-AA 10-17
MP-7.0(14)	MA-AA 10-22
MP-7.0(15)	MA-AA 10-21
MP-7.0(16)	MA-AA 10-19
MP-7.0(17)	MA-AA 10-16
MP-7.0(18)	MA-AA 10-20
MP-7.0(19)	MA-AA 00-45
MP-7.0(20)	MA-AA 00-45
MP-7.0(21)	MA-AA 00-45
MP-7.0(22)	Archiv
MP-7.0(23)	Archiv
MP-7.0(24)	Math. 1012
MP-7.0(25)	MA-AA 00-79
MP-7.0(26)	MA-AA 00-80
MP-7.0(27)	MA-AL 10-9
MP-7.0(28)	MA-AL 10-8
MP-7.0(29)	MA-AA 10-15
MP-7.0(30)	Archiv
MP-7.0(31)	Dok. 7635
MP-7.0(32)	MA-AA 11-16
MP-7.0(33)	2.2.28; 4.4.3 Hochschule
MP-7.0(34)	MA-AA 10-14
MP-7.0(35)	MA-AL 00-8
MP-7.0(36)	MA-AL 10-12
MP-7.0(37)	MA-AL 10-7

Die Bedeutung der einzelnen Kategorien (durch vorgestellte Zahl kenntlich gemacht):

20 AUTOR(EN), PERSÖNLICH
21 KORPORATIVE VERFASSER
30 SACHTITEL
37 HOCHSCHULSCHRIFTENVERMERK
40 BEARBEITER, ÜBERSETZER, HERAUSGEBER
41 KORPORATIVE HERAUSGEBER
50 ERSCHEINUNGSVERMERKE
51 QUELLENANGABE FÜR AUFSÄTZE IN PERIODIKA
52 QUELLENANGABE FÜR TEILE VON SAMMELWERKEN
53 SERIEN- BZW. GESAMTTITEL, GGF. MIT ZÄHLUNG
54 INTERNATIONALE STANDARDBUCHNUMMER (ISBN)
56 SPRACHANGABEN (NICHT BEI DEUTSCH)
70 GEFÄLLIGKEITSÜBERSETZUNG DES HAUPTSACHTITELS
71 STANDORT
74 NUMMER IN MIKROFILM-SAMMLUNGEN
99 TEXTREFERAT (ABSTRACT)

(ausführliche Beschreibung auf den Seiten 105-108)

Beitrag PME Proceedings 1983

DIDACTICAL INFORMATION SERVICE FOR MATHEMATICS IN SCHOOL (5th grade - 10th grade)

Bernhard Andelfinger, Landesinstitut Nordrhein-Westfalen (FRG), Neuss

WHY A DIDACTICAL INFORMATION SERVICE?

In the mathematical classroom teachers and pupils have a lot of problems with math and with one another. W.Breidenbach, an old experienced teacher trainer and book writer, says: " we have tried to do nearly all things for better teaching of math, but it didn't help. Therefore the causes for the 'math gap' in the classroom must be deeper than we had thought up to now."

An increasing minority of teachers has the same feeling as Breidenbach, but they can't find any help in their methodic books and in the frames given by the administration. Therefore a new sort of information about the teaching-learning-processes seems to be necessary.

In 1979 a small team of the Landesinstitut Nordrhein-Westfalen Neuss (FRG) started the DIDACTICAL INFORMATION SERVICE FOR MATHEMATICS IN SCHOOL (DID-M). It is a series of textbooks and documentation books referring to the most important topics of math for about 5th grade to 10th grade. The project will be ended in 1986; afterwards a supplementary service is planned.

POSITION OF DID-M

Most of 'math makers' in school and for school do this on the background of their own experience, and their scientific knowledge. During the teacher training periods the subjects being discussed often only are " how can teaching be made more effective, more interesting etc?"

But in classroom reality teachers often are getting disappointed because the pupils' problems have nothing at all to do with what the teachers had learned. Teachers then say: "pupils are not interested, they are against me, school politics are too liberal etc."

DID-M tries to objectivate the situation for teachers.

Firstly it informs about the communicational view of teaching (Bauersfeld 1983): on one side there are the teachers' concepts and on the other side the concepts of the learners. Every so often there are gaps between these concepts; teachers and learners "speak about the same but do not mean the same" (Krummheuer 1983).
Secondly DID-M informs about the attitudes and contents of teachers' concepts and learners' concepts as known up to now.
Thirdly DID-M gives hints for the teachers how to bridge the gaps and for administrators how to renew the curriculum for better bridging the gaps.

DESIGN OF DID-M

Teaching concepts (related to the FRG schools) are described in the textbooks in view of historical tradition, scientific influences, administrational frames, and didactical transformations. By questioning teachers and searching for results of classroom research the actual teaching situation is described (Andelfinger,1981).
You will get some information about learning concepts by questioning teachers. Most information results from material of educational research. DID-M makes systematical searches for such material in national and international information pools (ERIC, Psychinfo, FIZ,..) and by contacts with researchers. Comparing these results gives us an imagination of important learning concepts.
In a third step the teaching-learning situation can be shown by comparing the teaching and the learning concepts and by analyzing connections between them. This step includes also hints for teaching (in a somewhat hypothetical form).
All this information is given in the textbooks of DID-M.
The background materials (questioning) and references (i.e. abstracts) are given in the documentation books, as well as the results of evaluating the DID-M-books (see later).

PILOT STUDY "PROPORTION"

Design and products of DID-M have been tested in a pilot study for the topic "ratio/proportion" and its surroundings in school mathematics (see references). Some results:

The teaching concepts show a great difference between theory and practice. Ratio and proportion - didacticians say - have to be a headline and an important topic. Practice in schools is very different from this. Here ratio and proportion are nearly isolated in geometry (similarity); fractions are operators or regional sets; rule of three is a part of linear function theory or of equation theory; probability and statistics have not yet got a real place in the classroom. About 5% of the pupils overtake these teaching concepts.

A majority of pupils has other concepts:

- "rule of three"-problems are solved by isomorphic strategies, additive or multiplicative, avoiding fractions. Functional and/or proportional strategies are very seldom and unstable.
- pupils make a difference between 'basic' fractions (e.g. 1/2, 1/4) and 'artificial fractions' (e.g.7/13). For pupils basic fractions are instinctively numbers, artificial fractions are puzzles with vertically written pairs of numbers or tasks without results. Formal cognitive concepts play an outstanding role in computing with fractions.
- pupils have an unreflected imagination of 'ratios'. There are hierarchical stages to come from 'ratio' to 'proportion'. How pupils climb these stages is not yet known enough. Only few pupils reach the higher stages. Concrete models and experiments can help to climb the stages; information processing strategies are also helpful.
- similarity has three main aspects: parallels, angles, proportion. The proportional aspects of a pair of figures are not the most important thing to recognize similarity.

The pilot study shows that proportional concepts do not grow without impulses nor do grow in the field of artificial fractions. Proportional concepts often correlate with the age of the pupils and their intelligence. Proportionality as a linear function is a very complex concept; anti-pro-

portionality has nearly no connection with proportionality.

EVALUATION OF THE PILOT STUDY

The textbook "proportion" has been evaluated by a scaled questionnaire. The testgroup agreed with the content of the book and mentioned the high correlation with their own (often secret) experience in the classroom. Most of the persons said that the book will influence their teaching and their role as teachers.

The reactions of administrations were very different. Some used the book for their planning, others blocked the spreading of the DID-M-books in their district.

Educational researchers were very happy with the documentation books of DID-M.

The DID-M project initiated a controversary discussion in groups of teacher trainers.

THE STUDY " ARITHMETICS/ALGEBRA/FUNCTIONS"

In 1982 DID-M started the second step of its work, related to the non-geometrical topics of school mathematics from 5^{th} to 10^{th} grade.

The analysis of teaching concepts again shows a great difference between theory and practice. The administrational and didactical frames are characterized by the long time line 'constructing number areas from IN over IQ to IR' and by 'constructing a logical building of open statement algebra'.

Teachers' practice in school is characterized by fighting against difficulties with numbers and with manipulative algebra. What a stupid situation!

So far DID-M does not give any ready learning concepts but suggests some working hypothesis:

- There seems to exist a big pool of fundamental attitudes, strategies, and concepts, containing formal/cognitive elements, information processing elements and kinds of understanding variables and numbers.
- the area of numbers seems to be splitted in an area of numbers written in ciphers, basic fractions, and artificial fractions.
- algebra seems to be splitted in a hierarchy of three alge-

bras, the 'number-operation-algebra', the 'try-and-put-in-algebra', and the 'formal-syntactic-manipulative-algebra'.
- the theory of functions seems also to be splitted , some parts being combined with the upper mentioned algebras.
- sharp boundaries seem to exist between some parts of arithmetics and some parts of the algebras and no sharp boundaries between other parts of these two.

The results of the second step of DID-M will be published in 1984. The last step of DID-M will be done in the field of geometry.

REFERENCES

Andelfinger, B. Provocative texts and spontaneous reactions of teachers - a method for recognizing teaching and learning of mathematics. In: PME Proceedings, Grenoble, 1981, p.381-386

Bauersfeld, H. Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: Bauersfeld u.a., Lernen und Lehren von Mathematik, Köln, 1983

Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Thema: Proportion. Curriculum Heft 22, Neuss, 1982[2]

Didaktischer Informationsdienst Mathematik, Quellensammlung, Thema: Proportion. Dokumentation: Literaturnachweise 3, Neuss, 1982

Krummheuer, G. Das Arbeitsinterim im Mathematikunterricht. In: Bauersfeld u.a., Lernen und Lehren von Mathematik, Köln, 1983.